[O]dwoływanie się do intucji geometrycznych w pierwszej prezentacji rachunku różniczkowego uważam za niezmiernie użyteczne z dydaktycznego punktu widzenia, a nawet za niezastąpione, gdy nie chcemy tracić zbyt dużo czasu. Temu jednak że taka forma wprowadzenia w rachunek różniczkowy nie może rościć sobie pretensji do bycia naukową, nikt nie zaprzeczy. Poczucie niezadowolenia było we mnie tak przemożne, że podjąłem zdecydowane postanowienie, aby rozmyślać nad tym problemem, dopóki nie znajdę czysto arytmetycznego i doskonale rygorystycznego ugruntowania zasad analizy infinitezymalnej.

Często słyszy się, że rachunek różniczkowy zajmuje się wielkościami ciągłymi, ale nie podaje się nigdy wyjaśnienia, czym jest ta ciągłość. (...) [Należało więc] zagwarantować rzeczywistą definicję istoty ciągłości. Osiągnąłem ten cel 24 listopada roku 1858, a kilka dni później przedstawiłem wyniki swych rozmyślań memu drogiemu przyjacielowi Durége, z którym odbyłem długą i żywą dyskusję. (Richard Dedekind 1872)

LICZBY RZECZYWISTE
AKSJOMATYKA I KONSTRUKCJA DEDEKINDA

PAWEŁ GŁOWACKI (UNIWERSYTET WROCŁAWSKI)

Spis treści

1. Ujęcie aksjomatyczne

Z algebraicznego punktu widzenia zbiór liczb wymiernych $\boldsymbol{Q}$ stanowi *ciało*. Przypomnijmy, że zbiór Ω nazywamy *ciałem*, jeśli określone są w nim dwa działania

$$(x,y) \to x+y, \quad (x,y) \to x \cdot y,$$

zwane odpowiednio dodawaniem i mnożeniem, o następujących własnościach. Dodawanie jest łączne i przemienne z elementem neutralnym oznaczanym zazwyczaj przez 0. Ponadto, każdy element $x \in \Omega$ posiada element przeciwny. Mnożenie jest łączne i przemienne z elementem neutralnym oznaczanym przez e lub 1 różnym od 0. Różne od zera elementy Ω posiadają element odwrotny. Wreszcie mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Ciało Ω nazywa się ciałem *liniowo uporządkowanym*, jeśli istnieje w nim relacja liniowego porządku, która ta jest *zgodna* z działaniami algebraicznymi w tym sensie, że zostaje zachowana, gdy do obu stron nierówności dodamy tę samą liczbę lub pomnożymy je przez tę samą liczbę dodatnią.

Izomorfizmem ciał liniowo uporządkowanych Ω_1, Ω_2 nazywamy bijekcję $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ o własnościach

(a) $$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

(b) $$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y),$$

(c) $$\text{jeśli } x < y, \text{ to } \varphi(x) < \varphi(y) \text{ dla } x, y \in \Omega_1.$$

Z punktu widzenia analizy istotna jest *własność ciągłości* ciała.

1.1 (własność ciągłości). *Niech będzie dany ograniczony od góry niepusty podzbiór E liniowo uporządkowanego ciała Ω. Wśród liczb ograniczających E od góry jest zawsze liczba najmniejsza.*

Czytelnik samodzielnie sprawdzi, że poniższe sformułowanie wyraża tę samą własność.

1.2 (sformułowanie równoważne). *Niech będzie dany ograniczony od dołu niepusty podzbiór E liniowo uporządkowanego ciała Ω. Wśród liczb ograniczających E od dołu jest zawsze liczba największa.*

1.3. Definicja. *Jeśli ciało liniowo uporządkowane spełnia aksjomat ciągłości, to najmniejsze górne ograniczenie zbioru E ograniczonego od góry nazywamy jego kresem górnym i oznaczamy przez* $\sup E$. *Największe z dolnych ograniczeń zbioru F ograniczonego od dołu nazywamy kresem dolnym i oznaczamy przez* $\inf F$.

1.4. *Ciało liczb wymiernych $\boldsymbol{Q}$ nie spełnia aksomatu ciągłości.*

Dowód. Zacznijmy od spostrzeżenia znanego już Pitagorasowi, że równanie $x^2 = 2$ nie ma rozwiązań w liczbach wymiernych. Rzeczywiście, przypuśćmy, że pewna liczba wymierna x dana ułamkiem nieskracalnym $x = p/q$ spełnia to równanie. Wtedy

$$p^2 = 2q^2$$

i chwila namysłu wystarczy, by stwierdzić, że p^2, a więc i p jest liczbą parzystą. Wtedy jednak również q^2, a co za tym idzie, także q jest liczbą parzystą, co stoi w sprzeczności z nieskracalnością ułamka p/q.

Rozważmy zbiory

$$E = \{x \in \boldsymbol{Q} : x > 0, x^2 < 2\}, \qquad F = \{y \in \boldsymbol{Q} : y > 0,\ y^2 \geqslant 2\}.$$

Oba są niepuste, bo $1 \in E$ i $2 \in F$. Pokażemy, że F nie ma elementu najmniejszego, a więc że dla każdego $y \in F$ istnieje $z \in F$, takie że $z < y$. Dla $n \in \boldsymbol{N}$ niech $y_n = y - 1/n$. Wtedy

$$y_n^2 = \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 = y^2 - \frac{2y}{n} + \frac{1}{n^2} > 2 + (y^2 - 2) - \frac{2y}{n},$$

więc jeśli

$$n > \frac{2y}{y^2 - 2},$$

to $z = y_n$ jest szukanym elementem.

Podobnie wykazujemy, że E nie ma elementu największego.

Z tożsamości

$$y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$$

wnioskujemy, że y jest górnym ograniczeniem E, wtedy i tylko wtedy gdy $y^2 > x^2$ dla wszystkich $x \in E$, co pokazuje, że każdy element F jest górnym ograniczeniem E. Z drugiej strony jeśli $y \notin F$, to $y \in E$ lub $y \leqslant 0$. Żadna liczba ujemna nie jest górnym ograniczeniem E. Nie może być nim także żaden z elementów E, bo E nie ma największego elementu. Zatem F jest zbiorem wszystkich górnych ograniczeń E, ale nie ma elementu najmniejszego, co kończy dowód. □

Przez pewien czas będziemy przez $\mathbf{1}$ oznaczać jedynkę w ciele Ω. Niech

$$n\mathbf{1} = \mathbf{1} + \mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1}, \qquad n \in \boldsymbol{N},$$

gdzie suma obejmuje n identycznych składników.

1.5 (własność Archimedesa). *Niech Ω będzie uporządkowanym liniowo ciałem z własnością ciągłości. Wówczas dla każdej liczby $a > 0$ istnieje $k \in \boldsymbol{N}$, takie że $k\mathbf{1} > a$.*

Dowód. Przypuśćmy nie wprost, że tak nie jest. Wtedy a jest górnym ograniczeniem zbioru $E = \{k\mathbf{1} : k \in \boldsymbol{Z}\}$. Na mocy zasady ciągłości (1.1) istnieje najmniejsze górne ograniczenie c zbioru E. Mamy $c - \mathbf{1} < c$, więc $c - \mathbf{1}$ nie jest górnym ograniczeniem E. Stąd istnieje $k \in \boldsymbol{Z}$, takie że $k\mathbf{1} > c - \mathbf{1}$, a to pociąga $(k+1)\mathbf{1} > c$ wbrew temu, że c jest ograniczeniem E. Sprzeczność. □

1.6. *Uwaga.* Jeśli ciało Ω ma własność Archimedesa, to dla każdego $a > 0$ i każdego $b \in \Omega$ istnieje $k \in \boldsymbol{N}$, takie że

$$ka < b \leqslant (k+1)b.$$

1.7. *Uwaga.* Ciało liczb wymiernych $\boldsymbol{Q}$ ma własność Archimedesa, chociaż nie spełnia aksjomatu ciągłości.

1.8. Lemat. *Niech Ω będzie ciałem, a P podzbiorem Ω o własnościach:*

1) $\Omega \setminus \{0\} = P \cup -P$,
2) $P \cap (-P) = \emptyset$,
3) *Jeśli* $x, y \in P$, *to* $x + y \in P$ *i* $xy \in P$.

Wtedy relacja zdefiniowana wzorem

$$x > y \iff x - y \in P$$

jest relacją porządku liniowego w Ω zgodnego z działaniami.

Łatwy dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

1.9. Przykład. Podamy teraz przykład ciała liniowo uporządkowanego, które nie spełnia aksjomatu Archimedesa, a wobec tego nie spełnia również aksjomatu ciągłości. Niech Ω oznacza zbiór, do którego należy funkcja zerowa oraz wszystkie funkcje $f : \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{Q}$ postaci

$$f(x) = \frac{x^m \varphi(x)}{\psi(x)} \tag{*}$$

gdzie $m \in \boldsymbol{Z}$, a φ, ψ są wielomianami i $\psi(0) \neq 0 \neq \varphi(0)$. W sposób oczywisty Ω jest ciałem ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem funkcji. Elementem zerowym jest funkcja zerowa $\mathbf{0}(x) = 0$, a jedynką funkcja $\mathbf{1}(x) = 1$.

Aby wprowadzić w Ω porządek definiujemy najpierw elementy dodatnie. Niech f będzie postaci (*). Powiemy, że $f \succ \mathbf{0}$, jeśli $\varphi(0)\psi(0) > 0$. Zgodnie z tą definicją, każda z funkcji x^n, gdzie $n \in \boldsymbol{Z}$, jest elementem dodatnim. Podobnie $x^n - x^m \succ 0$, jeśli $n < m$.

Określony tak zbiór elementów dodatnich ma wszystkie własności wymagane w Lemacie 1.8, więc wzór

$$f \prec g \iff g - f \succ \mathbf{0}$$

definiuje relację porządku liniowego, który jest zgodny z działaniami w Ω. Ponadto, dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ mamy

$$n\mathbf{1} \prec x^{-1},$$

co zaprzecza własności Archimedesa.

1.10 (własność gęstości). *Uporządkowane liniowo ciało Ω z własnością Archimedesa zawiera podciało $\mathcal{Q}$ izomorficzne z ciałem $\boldsymbol{Q}$, w taki sposób że dla każdych $a, b \in \Omega$*

$$\textit{jeśli } a < b, \textit{ to istnieje } x \in \mathcal{Q}, \textit{ takie że } a < x < b.$$

Dowód. Definiujemy odwzorowanie

$$\boldsymbol{Q} \ni p/q \mapsto (p\mathbf{1})(q\mathbf{1})^{-1} \in \Omega.$$

Pozostawiamy Czytelnikowi, sprawdzenie, że definicja jest jednoznaczna i że jest to odwzorowanie różnowartościowe spełniające warunki a),b),c) dla $w, v \in \boldsymbol{Q}$. Stąd też łatwo wynika, że $\mathcal{Q} = \varphi(\boldsymbol{Q})$ jest podciałem ciała Ω.

Od tej pory będziemy pisać

$$(p\mathbf{1})(q\mathbf{1})^{-1} = pq^{-1} = \frac{p}{q}.$$

W szczególności zamiast $\mathbf{1}$ będziemy pisać 1.

Przechodzimy do drugiej części dowodu. Niech $a, b \in \mathcal{Q}$ i $a < b$. Na mocy a) istnieje $n \in \boldsymbol{N}$, takie że $n > \frac{1}{b-a}$, a więc $1/n < b - a$. Korzystając ponownie z a) znajdujemy $m \in \boldsymbol{Z}$, takie że

$$\frac{m}{n} < b \leqslant \frac{m+1}{n}.$$

Zauważmy, że

$$b - \frac{m}{n} < \frac{1}{n}$$

a więc

$$a < \frac{m}{n} < b.$$

□

1.11. Przykład. Powróćmy do ciała Ω funkcji wymiernych z Przykładu 1.9, by zauważyć, że ono też zawiera podciało izomorficzne z $\boldsymbol{Q}$. Jest nim podciało $\mathcal{Q}$ złożone z funkcji stałych. Widać jednak, że zbiorowi $\mathcal{Q}$ daleko do bycia gęstym w ciele Ω.

1.12. Lemat. a) *Niech będą dane liczby wymierne $w, x, y \in \boldsymbol{Q}$, takie że $w < x+y$. Wtedy $w = u+v$, gdzie u, v są wymierne i $u < x$, $v < y$.*

b) *Niech będą dane dodatnie liczby wymierne $w, x, y \in \boldsymbol{Q}$, takie że $w < xy$. Wtedy $w = uv$, gdzie u, v są dodatnie wymierne i $u < x$, $v < y$.*

Dowód. a) Mamy $w - x < y$, więc istnieje $u \in \boldsymbol{Q}$, takie że $w - x < u < y$. Wtedy $w = u + (w-u) = u + v$ jest szukanym rozładem.

b) Drugiej części dowodzi się analogicznie. □

1.13. Twierdzenie. *Niech Ω_1 i Ω_2 będą ciałami liniowo uporządkowanymi spełniającym aksjomat ciągłości. Wówczas istnieje izomorfizm $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$.*

Dowód. Na mocy Twierdzenia (1.10) istnieją gęste podciała $\boldsymbol{Q}_1 \subset \Omega_1$ i $\boldsymbol{Q}_2 \subset \Omega_2$, oba izomorficzne z ciałem liczb wymiernych $\boldsymbol{Q}$. Niech więc $\varphi : \boldsymbol{Q}_1 \to \boldsymbol{Q}_2$ będzie izomorfizmem tych dwóch ciał. Zacznijmy od następującej uwagi: Jeśli

$$A(x) = \{\varphi(w) : w < x, w \in \mathcal{Q}_1\}, \qquad B(x) = \{\varphi(v) : v \geqslant x, v \in \mathcal{Q}_1\},$$

to dla dowolnego $x \in \Omega_2$

$$\sup A(x) = \inf B(x).$$

Faktycznie, jeśli $\varphi(w) \in A(x)$ i $\varphi(v) \in B(x)$, to $\varphi(w) < \varphi(v)$, a więc $\sup A(x) \leqslant \sup B(x)$. Jednocześnie możliwość $\sup A(x) < \sup B(x)$ jest wykluczona, bo wtedy istniałyby $u, t \in \boldsymbol{Q}_1$, takie że $\sup A(x) < \varphi(u) < \varphi(t) < \inf B(x)$ i mielibyśmy $x \leqslant u < t < x$, co stanowi sprzeczność.

W szczególności, gdy $x \in \mathcal{Q}_1$, mamy

$$\sup A(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \inf B(x), \qquad x \in \mathcal{Q}_1, \tag{1.14}$$

w więc wszystkie trzy wielkości są sobie równe.

Definiujemy $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ w następujący sposób: Dla $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2$ niech

$$\Phi(x) = \sup A(x) = \inf B(x).$$

Na mocy (1.14) Φ jest rozszerzeniem φ.

1) Niech teraz $x, y \in \Omega_1$ i $x < y$. Niech $v, w \in \boldsymbol{Q}_1$ będą takie, że $x < v < w < y$. Wtedy

$$\Phi(x) \leqslant \varphi(v) < \varphi(w) \leqslant \Phi(y),$$

więc odwzorowanie Φ zachowuje porządek i jest różnowartościowe.

2) Aby wykazać, że Φ jest bijekcją, wystarczy stwierdzić, że jest „na". Niech $y \in \Omega_2$. Poszukamy $x \in \Omega_1$, takiego że $\Phi(x) = y$. Połóżmy

$$C(y) = \{w \in \mathcal{Q}_1 : \varphi(w) < y\}, \qquad x = \sup C(y).$$

Jeśli $w < x$, to istnieje $u \in C(y)$, takie że $w < u \leqslant x$, więc na mocy 1) $\varphi(w) \leqslant y$, a zatem $\Phi(x) \leqslant y$. Z drugiej strony, jeśli $\varphi(w) < y$, to $w \in C(y)$. Stąd $w \leqslant x$ i $\varphi(w) \leqslant \Phi(x)$, a więc $y \leqslant \Phi(x)$. Ostatecznie, $\Phi(x) = y$, a zatem Φ jest bijekcją.

3) W kolejnym kroku pokazujemy, że $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Rzeczywiście,

$$\Phi(-x) = \sup A(-x) = \sup -B(x) = -\inf B(x) = -\Phi(x).$$

4) Chcemy teraz pokazać, że $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$. W tym celu wystarczy zauważyć, że

$$A(x + y) = A(x) + A(y).$$

Rzeczywiście, jeśli $\varphi(u)+\varphi(v) = \varphi(u+v) \in A(x)+A(y)$, to $\varphi(u+v) \in A(x+y)$, więc $A(x)+A(y) \subseteq A(x + y)$. Jeśli natomiast $\varphi(w) \in A(x + y)$, to $w < x + y$. Zgodnie z Lematem 1.12 istnieją $u < x$ i $v < y$, takie że $w = u + v$. Zatem $A(x + y) \subseteq A(x) + A(y)$.

5) Aby pokazać, że

$$\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y), \qquad x, y \geqslant 0, \tag{1.15}$$

wystarczy dowieść, że $B(xy) = B(x)B(y)$. Dowód jest analogiczny do dowodu 4) i korzysta z Lematu 1.12 b).

Niech teraz $x, y \in \Omega_1$ będą dowolne. Przypadek $x, y \geqslant 0$ już rozważyliśmy (patrz (1.15)). Jeśli $x \geqslant 0$ i $y < 0$, to na mocy 3) i (1.15)

$$\Phi(xy) = \Phi(-x(-y)) = -\Phi(x(-y)) = -\Phi(x)\Phi(-y) = \Phi(x)\Phi(y).$$

Jeśli $x < 0, y < 0$, rozumujemy analogicznie. $\square$

2. Przekroje Dedekinda

Naszym głównym celem jest teraz udowodnienie następującego twierdzenia.

2.1. Twierdzenie. *Istnieje ciało liniowo uporządkowane* $\boldsymbol{R}$ *mające własność ciągłości.*

2.2. Definicja. *To jedyne z dokładnością do izomorfizmu liniowo uporządkowane ciało z własnością ciągłości* $\boldsymbol{R}$ *(Twierdzenie 1.13) będziemy nazywać ciałem liczb rzeczywistych.*

Tak jak do tej pory będziemy zakładać, że znane i dane jest ciało liczb wymiernych, a zmierzać będziemy do konstrukcji liniowo uporządkowanego ciała z własnością ciągłości, co będzie stanowić dowód Twierdzenia 2.1. Konstrukcję tę zawdzięczamy Dedekindowi [1]. Oparta jest ona na pojęciu *przekroju.*

2.3. Definicja. *Przekrojem Dedekinda nazywamy każdy właściwy podzbiór* $\boldsymbol{Q}$*, który nie zawiera elementu największego i wraz z każdym swoim elementem* x *zawiera wszystkie liczby mniejsze od* x*. Klasę wszystkich przekrojów Dedekinda będziemy oznaczać przez* $\mathcal{R}$*.*

Nietrudno zauważyć, że jeśli α i β są przekrojami, to

$$\alpha \subseteq \beta \qquad \text{lub} \qquad \beta \subseteq \alpha.$$

Zatem relacja *inkluzji* wprowadza porządek liniowy w $\mathcal{R} \subset 2^{\boldsymbol{Q}}$.

2.4. *Niech będzie dany niepusty podzbiór* $E \subset \mathcal{R}$ *ograniczony z góry. Wśród elementów* $\mathcal{R}$ *ograniczających* E *od góry istnieje najmniejszy.*

Dowód. Nietrudno sprawdzić, że zbiór

$$\alpha = \bigcup_{\beta \in E} \beta$$

jest przekrojem i ma żądaną własność. $\square$

Niech będzie dana liczba wymierna $x \in \boldsymbol{Q}$. Zbiór

$$x^\star = \{y \in \boldsymbol{Q} : y < x\}$$

jest, jak łatwo sprawdzić, przekrojem. Przekroje tej postaci będziemy nazywać *wymiernymi.* Niech

$$\mathcal{Q} = \{x^\star \in \mathcal{R} : x \in \boldsymbol{Q}\}.$$

Oczywiście nie każdy przekrój jest wymierny. Przykładem przekroju niewymiernego jest zbiór

$$\alpha = \{x \in \boldsymbol{Q} : x < 0\} \cup \{x \in \boldsymbol{Q} : x^2 < 2\}.$$

Czytelnik domyśla się, że rodzina przekrojów $\mathcal{R}$ jest naszym kandydatem na ciało liczb rzeczywistych. Jak dotąd wimy, że w $\mathcal{R}$ obowiązuje porządek liniowy i spełniony jest aksjomat ciągłości. Pozostaje wprowadzić działania, w taki sposób by

a) spełniały aksjomaty ciała,

b) były zgodne zgodne z relacją porządku $\subseteq$.

3. Działania na przekrojach

Definiujemy działania w $\mathcal{R}$. Zaczniemy od lematów.

3.1. Lemat. *Niech $\alpha \in \mathcal{R}$. Dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ istnieje (dokładnie jedna) liczba całkowita m_n, taka że*

$$x_n = \frac{m_n}{n} \in \alpha, \qquad x_n + \frac{1}{n} \notin \alpha.$$

Dowód. Dla ustalonego $n \in \boldsymbol{N}$ rozważmy liczby postaci m/n, gdzie $m \in \boldsymbol{Z}$. Niech m_n będzie największym spośród tych m, dla których $m/n \in \alpha$. $\square$

3.2. Lemat. *Niech $u < x + y$, gdzie $u, x, y \in \boldsymbol{Q}$. Wówczas $u = w + v$, gdzie $w < x$, $v < y$ i $w, v \in \boldsymbol{Q}$.*

Dowód. Z założenia $u - x < y$, więc istnieje $v \in \boldsymbol{Q}$, takie że $u - x < v < y$. Niech $w = u - v \in \boldsymbol{Q}$, Wtedy $u = w + v$ i $w = u - v < x$ oraz $v < y$. $\square$

3.3. Twierdzenie (dodawanie). *Jeśli $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$, to także*

$$\alpha + \beta = \{x + y : x \in \alpha, y \in \beta\}, \qquad -\alpha = \{y \in \boldsymbol{Q} : \exists_{z \in \boldsymbol{Q}} \forall_{x \in \alpha}\ x + y < z < 0\}$$

są przekrojami. Tak zdefiniowane dodawanie jest przemienne i łączne, a $0^\star$ jest jego elementem neutralnym i

$$\alpha + (-\alpha) = 0^\star, \qquad \alpha \in \mathcal{R}.$$

Co więcej, dla dowolnego $0^\star \subseteq \gamma$ nierówność $\alpha \subseteq \beta$ pociąga

$$\alpha + \gamma \subseteq \beta + \gamma.$$

Dowód jest raczej rutynowy, więc go pomijamy. Podpowiedzmy, że sprawdzenie, że $\alpha + \beta$ jest przekrojem wymaga Lematu 1.12 a).

Mnożenie przekrojów zdefiniujemy najpierw dla przekrojów nieujemnych dodatnich, tj. takich, że $0^\star \subset \alpha$.

3.4. Twierdzenie (mnożenie). *Jeśli $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ są dodatnie, to także*

$$\alpha\beta = (0, \infty) \cup \{xy : x, y \geqslant 0, x \in \alpha, y \in \beta\},$$

oraz

$$\alpha^{-1} = \{-\infty, 0) \cup \{y \in \boldsymbol{Q} : y \geqslant 0 \ \textit{oraz} \ \exists_{z \in \boldsymbol{Q}} \forall_{x \in \alpha, x \geqslant 0} \ xy < z < 1\}.$$

są przekrojami dodatnimi. Tak zdefiniowane mnożenie jest przemienne i łączne, a $1^\star$ jest jego elementem neutralnym i

$$\alpha\alpha^{-1} = 1^\star.$$

Ten dowód też przebiega rutynowo i analogicznie do dowodu Twierdzenia 3.3.

3.5. Wniosek. *Jeśli $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{R}$ są dodatnie, to*

(a)
$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

Jeśli dodatkowo $\beta \subseteq \alpha$, to także

(b)
$$(\alpha - \beta)\gamma = \alpha\gamma - \beta\gamma.$$

Dowód. Pierwsza część wniosku wynika łatwo z definicji mnożenia przekrojów i z analogicznej własności dla liczb wymiernych. Druga wynika z pierwszej, bo

$$(\alpha - \beta)\gamma + \beta\gamma = (\alpha - \beta + \beta)\gamma = \alpha\gamma.$$

Po przeniesieniu wyrazu $\beta\gamma$ na drugą stronę, otrzymujemy tezę. □

3.6. Wniosek. *Jeśli $0^\star \subseteq \alpha \subset \beta$ i $0^\star \subset \gamma$, to $\alpha\gamma \subset \beta\gamma$.*

3.7. Definicja. *Dla $\alpha \in \mathcal{R}$ niech*

$$\sigma(\alpha) = \begin{cases} 1^\star, & 0^\star \subseteq \alpha, \\ (-1)^\star, & \alpha \subset 0^\star. \end{cases}$$

oraz

$$|\alpha| = \sigma(\alpha)\alpha.$$

3.8. Definicja. *Mnożenie następujący sposób. Dla elementów $1^\star$ i $(-1)^\star$:*

$$1^\star 1^\star = 1, \qquad -(1)^\star(-1)^\star = 1^\star, \qquad (-1)^\star 1^\star = 1^\star(-1)^\star = (-1)^\star.$$

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ definiujemy $\alpha\beta$ jako element spełniający warunki

$$\sigma(\alpha\beta) = \sigma(\alpha)\sigma(\beta), \qquad |\alpha\beta| = |\alpha||\beta|.$$

Zatem

$$\alpha\beta = \Big(\sigma(\alpha)|\alpha|\Big)\Big(\sigma(\beta)|\beta|\Big) = \Big(\sigma(\alpha)\sigma(\beta)\Big)\Big(|\alpha||\beta|\Big).$$

3.9. Twierdzenie. *Dla dowolnych $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{R}$*

$$\alpha\beta = \beta\alpha, \qquad (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma),$$

oraz

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

Co więcej, jeśli $\alpha \subseteq \beta$ i $0^\star \subseteq \gamma$, to $\alpha\gamma \subseteq \beta\gamma$.

Dowód pozostawiamy Czytelnikowi jako samodzielne ćwiczenie.

Z Twierdzeń 3.3, 3.4 i 1.13 wynika Twierdzenie 2.1. Szukanym ciałem liniowo uporządkowanym z własnością ciągłości jest rodzina przekrojów Dedekinnda $\mathcal{R}$ z relacją inkluzji i działaniami określonymi w tym rozdziale. W ten sposób dotarliśmy do wyznaczonego celu.

4. Uwagi końcowe

Na zakończenie kilka słów komentarza. „Liczby rzeczywiste” skonstruowane metodą Dedekinda są w istocie rzeczy pewnymi podzbiorami zbioru liczb wymiernych, co może wydać się nieco szokujące lub nawet ekstrawaganckie. Nawet „liczby wymierne”, czyli elementy ciała $\mathcal{Q}$, są takiej postaci.

Chciałbym jednak zapewnić Czytelnika, że mamy tu do czynienia z dość często stosowaną w matematyce procedurą. Matematycy bowiem mniej zważają na *naturę* definiowanych obiektów, a bardziej na ich *abstrakcyjne własności*. Chwila zastanowienia pozwala docenić doniosłość i prostotę leżącej u podstaw całej konstrukcji idei. Chodzi bowiem o pytanie, skąd wziąć „materiał” do załatania luk w zbiorze liczb wymiernych.

Odpowiedź Dedekinda brzmi: Nie szukajmy go wcale. Dziury w serze szwajcarskim wyznacza sam ser. Nie mówmy więc o lukach, ale o tym, co jest. Mówmy o zbiorach, które nazwaliśmy przekrojami. Przekroje wymierne pozostają we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z liczbami wymiernymi, a niewymierne z „lukami”. Mniejsza o to, że przekroje są skomplikowanymi obiektami. Chodzi o ich własności. Ostatecznie wszystkie możliwe konstrukcje i tak prowadzą do obiektów izomorficznych.

Rzeczywiście, oprócz konstrukcji Dedekinda istnieje druga konkurencyjna konstrukcja liczb rzeczywistych, w której w miejsce przekrojów rozważa się klasy abstrakcji równoważnych ciągów Cauchy'ego liczb wymiernych. Samo sformułowanie wskazuje, że nie jest to droga dużo prostsza. Przeciwnie, sądzę, że początkujący student analizy lepiej poradzi sobie z wyłożoną wyżej teorią.

Czytelnika, któremu powyższe wywody wydają się nazbyt skrótowe, odsyłamy do I rozdziału książki Rudina [5], gdzie znajdzie trochę inne ujęcie tematu i, być może, niektóre pominięte tu szczegóły. Šilov [6] omawia obszernie i wnikliwie podejście aksjomatyczne w rozdziale I. Można też zajrzeć do Maurina [4], rodział I.6 i zapoznać się ze wspomnianą wyżej teorią Cantora. Pełny wykład teorii systemów liczbowych od liczb naturalnych, poprzez liczby całkowite, wymierne i rzeczywiste, aż do liczb zespolonych można znaleźć w pracy Feffermana [2]. Polecam również podrozdziały 1.8 i 1.9 podręcznika Kuratowskiego [3], gdzie mówi się o aksjomatyce i teorii Dedekinda liczb rzeczywistych. I wreszcie, kto wie? Może któryś z Czytelników zajrzy do pracy Dedekinda [1]. Dla zachęty podpowiem, że w Internecie znaleźć można angielskie tłumaczenie tego eseju, bo jest to raczej esej niż praca matematyczna w dzisiejszym rozumieniu, czego próbkę daje zamieszczone na początku motto.

Literatura

[1] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*,
[2] S. Fefferman, *The number systems*,
[3] K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy*,
[4] K. Maurin, *Analiza, część I – Elementy*,
[5] W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*,
[6] G.E. Šilov, *Matematičeskij analiz. Funkcii odnogo peremennogo.*

5. Dodatek – aksjomaty i zadania

Ciałem liniowo uporządkowanym nazywamy zbiór Ω z działaniami $(x, y) \mapsto x + y$ i $(x, y) \mapsto xy$ oraz z relacją porządku $<$, które mają następujące własności:

D1. Dla każdych $x, y \in \Omega$ jest $x + y = y + x$,
D2. Dla każdych $x, y, z \in \Omega$ jest $(x + y) + z = z + (y + z)$,
D3. Istnieje element $y_0 \in \Omega$, taki że dla każdego $x \in \Omega$ jest $x + y_0 = x$. (Zadanie: Istnieje dokładnie jeden taki element.) Element ten oznaczmy przez 0.
D4. Dla każdego $x \in \Omega$ istnieje $y \in \Omega$, takie że $x + y = 0$. (Zadanie: Dla danego x istnieje dokładnie jeden taki y.) Element ten oznaczamy przez $-x$.

M1. Dla każdych $x, y \in \Omega$ jest $xy = yx$,
M2. Dla każdych $x, y, z \in \Omega$ jest $(xy)z = z(yz)$,
M3. Istnieje element $0 \neq z_0 \in \Omega$, taki że dla każdego $x \in \Omega$ jest $xz_0 = x$. (Zadanie: Istnieje dokładnie jeden taki element.) Element ten oznaczmy przez 1.
M4. Dla każdego $0 \neq x \in \Omega$ istnieje $y \in \Omega$, takie że $xy = 1$. (Zadanie: Dla danego $x \neq 0$ istnieje dokładnie jeden taki y.) Element ten oznaczamy przez x^{-1},

DM. Dla każdych $x, y, z \in \Omega$ jest $(x + y)z = xz + yz$,

P1. Dla każdych $x, y, z \in \Omega$ relacje $x < y$ i $y < z$ pociągają $x < z$,
P2. Dla każdych $x, y \in \Omega$ relacja $x < y$ wyklucza $y < x$,
P3. Dla każdych $x, y \in \Omega$ jest $x < y$ lub $x = y$ lub $y < x$,

DP. Dla każdych $x, y, z \in \Omega$, jeśli $x < y$, to $x + z < y + z$.
MP. Dla każdych $x, y > 0$ jest $xy > 0$.

1. Pokaż, że dla dowolnego $x \in \Omega$ jest $(-1) \cdot x = -x$.
2. Pokaż, że $0 < 1$.
3. Pokaż, że $(-1)(-1) = 1$.
4. Pokaż, że jeśli obie strony nierówności $x < y$ pomnożymy przez tę samą liczbę $z > 0$, to nierówność się zachowa.
5. Pokaż, że dla dowolnego $x \in \Omega$ nierówność $x < 0$ pociąga $-x > 0$.
6. Pokaż, że dla dowolnego $x \in \Omega$ mamy $0 \cdot x = 0$.
7. Niech $a > 0$. Pokaż, że $a^{-1} > 0$.
8. Pokaż, że jeśli $0 < x < 1$, to $x^n < 1$ dla każdej liczby naturalnej n.
9. Pokaż, że jeśli $x, y > 0$, to także $xy > 0$.
10. Pokaż, że dla dowolnych $x, y \in \Omega$
$$|xy| \leqslant \frac{x^2 + y^2}{2}.$$
11. Dana jest liczba $0 < a < 1$. Pokaż, że dla każdego naturalnego $n \geqslant 2$ jest $a^n < a$.

6. Dodatek – Jeszcze jedno ciało niearchimedesowskie

Zbudujemy teraz jeszcze jeden przykład ciała liniowo uporządkowanego, które nie spełnia aksjomatu Archimedesa. Niech Ω będzie zbiorem nieskończonych ciągów liczb wymiernych $\{a_k\}_{k\in \boldsymbol{Z}}$ indeksowanych liczbami całkowitymi o skończonej liczbie różnych od zera wyrazów o indeksach ujemnych:
$$a = (\ldots, 0, \ldots, 0, a_N, a_{N+1}, \ldots, a_k, \ldots).$$
Działania w Ω definiujemy tak:
$$(a + b)_k = a_k + b_k, \qquad k \in \boldsymbol{Z},$$
oraz
$$(ab)_k = \sum_{j\in \boldsymbol{Z}} a_j b_{k-j}, \qquad k \in \boldsymbol{Z}.$$
Zwróćmy uwagę, że suma definiująca mnożenie jest zawsze skończona, więc działanie jest dobrze zdefiniowane. Sprawdzenie aksjomatów ciała poza istnieniem elementów odwrotnych nie sprawia żadnych trudności. W szczególności widzimy, że element zerowy to po prostu ciąg zerowy, a element

neutralny względem mnożenia to ciąg

$$e_k = \begin{cases} 0, & k \neq 0, \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

Jak się za chwilę okaże, ważnym elementem jest też

$$\delta_k = \begin{cases} 0, & k \neq 1, \\ 1, & k = 1. \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że δ ma element odwrotny

$$\delta_k^{-1} = \begin{cases} 0, & k \neq 1, \\ 1, & k = -1. \end{cases}.$$

Niech $a \in \Omega$ i niech N będzie najmniejszym indeksem, takim że $a_k \neq 0$. Mówimy wtedy, że a_N jest wyrazem wiodącym ciągu a. Z definicji mnożenia łatwo wywnioskować, że mnożąc element o wiodącym wyrazie a_{N_1} przez element o wiodącym wyrazie b_{N_2} otrzymamy element o wiodącym wyrazie $c_{N_1+N_2}$. W szczególności mnożenie przez δ przesuwa wszystkie wyrazy ciągu o jedno miejsce w prawo, tzn.

$$(\delta a)_k = a_{k-1}.$$

Pokażemy teraz, że każdy niezerowy element $a \in \Omega$ ma element odwrotny. Mnożąc a przez odpowiednią potęgę δ^{-N}, możemy zagadnienie sprowadzić do odwracania elementów a o wyrazie wiodącym a_0. Szukamy zatem $b \in \Omega$, takiego że $ab = e$. Widzimy, że wiodącym wyrazem b musi być b_0. Aby znaleźć element odwrotny b musimy rozwiązać równania

$$\sum_{j \geqslant 0} a_j b_{-j} = 1,$$

oraz nieskończenie wiele równań

$$\sum_{j \geqslant 0} a_j b_{k-j} = 0, \qquad k \geqslant 1.$$

Mamy więc $a_0 b_0 = 1$ oraz

$$a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0 = 0.$$

Widać, że $b_0 = a_0^{-1}$, a jeśli dane są już $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$, można obliczyć b_k. Zatem element odwrotny dla $a \neq 0$ zawsze istnieje i Ω jest ciałem. Jako ćwiczenie polecamy wzór

$$(1 - \delta)^{-1} = b.$$

gdzie $b_k = 1$ dla $k \geqslant 0$ i $b_k = 0$ dla $k < 0$.

W ciele Ω wprowadzamy porządek liniowy jako porządek leksykograficzny. Dla $a, b \in \Omega$, $a \neq b$, znajdujemy najmniejszy index N, taki że $a_N \neq b_N$ i kładziemy $a < b$, jeśli $a_N < b_N$. Sprawdzenie, że jest to porządek liniowy jest nietrudnym ćwiczeniem. Widzimy, że $a > 0$, wtedy i tylko wtedy gdy wyraz wiodący a jest dodatni. Łatwo spostrzegamy, że suma i iloczyn wyrazów dodatnich jest wyrazem dodatnim, a więc porządek jest zgodny z działaniami.

Pozostaje pokazać, że liniowo uporządkowane ciało Ω nie spełnia aksjomatu Archimedesa. W tym celu zauważmy, że $\delta^{-1} > 0$ i dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$

$$ne < \delta^{-1}.$$

Niech

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Tak zdefiniowana wartość bezwzględna ma znane własności:

1) $|a| \geqslant 0$ dla $a \in \Omega$,

2) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ dla $a, b \in \Omega$,
3) $|ab| = |a|\,|b|$ dla $a, b \in \Omega$.

Powiemy, że ciąg $a_n \in \Omega$ jest zbieżny do $a \in \Omega$, jeśli dla każdego przedziału (x, y), jeśli $a \in (x, y)$, to i $a_n \in (x, y)$ dla prawie wszystkich n. Mówimy, że ciąg (a_n) jest sumowalny, jeśli ciąg

$$A_n = \sum_{k=1}^{N} a_k$$

ma granicę A. Granicę tę nazywamy nieskończoną sumą ciągu (a_n) i oznaczamy przez

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Zauważmy, że

$$\delta^n \to 0$$

oraz dla każdego $a \in \Omega$ istnieje $N \in \boldsymbol{Z}$, takie że

$$a = \sum_{k=N}^{\infty} a_k \delta^k.$$

Nietrudno też pokazać, że podciało Ω generowane przez element δ jest izomorficzne z ciałem funkcji wymiernych, o którym była mowa w Przykładzie 1.9.

Opisane tutaj ciało nazywa się *ciałem formalnych szeregów Laurenta* nad ciałem liczb wymiernych. (pg)