1 Wykład 7

Przykład 1.1 $X^T = (5.1, 5.5, 4.9, 5.3)$ *jest próbą prostą z rozkładu normalnego* $\mathcal{N}(\mu, 1)$. *Na poziomie istotności* 0.05 *testujemy hipotezę*

$$H_0 : \mu = 5$$

przeciwko hipotezie

$$H_1 : \mu = 6$$

Test ilorazu wiarygodności ma postać:

$$\begin{aligned} Z &> k, \text{ gdzie} \\ Z &= \frac{\overline{X} - 5}{1/\sqrt{4}} = \frac{5.2 - 5}{1/2} = 0.4 \\ 1 - \Phi(k) &= 0.05 \Longrightarrow k = 1.65 \end{aligned}$$

Nie ma więc powodu aby odrzucić hipotezę zerową, że średnia wartość rozkładu wynosi $\mu = 5$.

Gdybyśmy chcieli testować hipotezę

$$H_0 : \mu = 6$$

przeciwko hipotezie

$$H_1 : \mu = 5$$

Test ilorazu wiarygodności ma postać:

$$\begin{aligned} Z &< k, \text{ gdzie} \\ Z &= \frac{\overline{X} - 6}{1/\sqrt{4}} = \frac{5.2 - 6}{1/2} = -1.6 \\ \Phi(k) &= 0.05 \Longrightarrow -1.65 \end{aligned}$$

W tym przypadku również nie ma powodu aby odrzucić hipotezę zerową, że średnia wartość rozkładu wynosi $\mu = 6$.¥

Sprzeczność, którą można spostrzec w tym przykładzie jest jedynie pozorna. W obu przypadkach hipoteza zerowa jest jedynie *prawdopodobna* - na podstawie zebranych obserwacji nie możemy jej jednak odrzucić, gdyż prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju[1] przekroczyłoby dozwolony poziom 0.05.

W praktyce testowania hipotez moc argumentów, świadczących przeciw hipotezie zerowej mierzy się przy pomocy wielkości, zwanej poziomem krytycznym. Poziom krytyczny określany jest dla testu ilorazu wiarygodności.

Definicja 1.1 *Poziomem krytycznym*[2] *obserwacji* X_0 *dla układu hipotez* (H_0, H_1) *nazywamy liczbę*

$$p^* = p^*(X_0; H_0, H_1) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P\left(L_X(H_0, H_1) > L_{X_0}(H_0, H_1)\right)$$

[1] odrzucić H_0 gdy jest prawdziwa

[2] w literaturze obcojęzycznej nazywany p-value

Test na poziomie istotności α odrzuca H_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $p^* \leq \alpha$. Ta nierówność oznacza, że poziom krytyczny p^* obserwacji X_0 jest najmniejszym poziomem istotności, na którym odrzucilibyśmy hipotezę H_0 na podstawie obserwacji X_0 Im mniejszy poziom krytyczny tym mniej ryzykujemy odrzucając hipotezę zerową. Można powiedzieć, że poziom krytyczny mierzy wielkość tego ryzyka.

W przykładzie 1.1 dla układu hipotez $(\mu = 5, \mu = 6)$

$$p^* = P\left(Z > 0.4 \,|\mu = 5\right) = 1 - \Phi\left(0.4\right) = 0.3446,$$

natomiast dla hipotez $(\mu = 5, \mu = 6)$

$$p^* = P\left(Z < -1.6 \,|\mu = 6\right) = \Phi\left(-1.6\right) = 0.0548.$$

Jak widać, ryzyko z odrzucenia hipotezy zerowej jest znacznie mniejsze w przypadku hipotez $(\mu = 6, \mu = 5)$, niż dla $(\mu = 5, \mu = 6)$ ale i tak przekracza przyjęty poziom 0.05. Informacja dostarczona przez poziom krytyczny jest znacznie bogatsza niż ta, która wynika z wiedzy czy na danym poziomie istotności odrzucamy hipotezę zerową.

Istnieje interesująca dualność między przedziałami ufności a testowaniem hipotez.

Definicja 1.2 *Obszarem akceptacji dla układu hipotez (H_0, H_1) nazywamy dopełnienie obszaru krytycznego, czyli zbiór obserwacji, dla którego nie odrzucamy hipotezy zerowej.*

Prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 1.1 **(i)** *Przypuśćmy, że skonstruowaliśmy na poziomie istotności α dla każdego θ_0 test $H_0 : \theta = \theta_0$ o obszarze akceptacji $A(\theta_0)$ przeciwko jakiejś alternatywie. Wtedy*

$$I(X) = \{\theta : X \in A(\theta)\}$$

jest zbiorem ufności dla θ na poziomie ufności $1 - \alpha$.

(ii) *Niech $I(X)$ będzie zbiorem ufności dla θ na poziomie $1-\alpha$. Wtedy zbiór akceptacji testu na poziomie istotności α dla hipotezy $H_0 : \theta = \theta_0$ przeciwko jakiejś alternatywie ma postać*

$$A(\theta_0) = \{X : \theta_0 \in I(X)\}$$

Dowód. Zauważmy, że

$$P\left(X \in A(\theta_0) \,|\theta = \theta_0\right) = P\left(\theta \in I(X) \,|\theta = \theta_0\right) \tag{1}$$

W przypadku (i) lewa strona równości (1) ma wartość $1 - \alpha$, natomiast w przypadku (ii) - prawa strona tej równości ma wartość $1 - \alpha$. ∎

Rozkład χ^2

Ważną rolę w statystyce odgrywa rozkład χ^2.

Definicja 1.3 *Niech n będzie liczbą naturalną, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0,1)$. Rozkładem χ^2 z n stopniami swobody nazywamy rozkład sumy*

$$\chi_n^2 = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Rozważając różne testy będziemy od tej chwili rozważać hipotezy alternatywne, *niekoniecznie* rozłączne z hipotezą zerową. Zazwyczaj hipoteza zerowa nakłada ustaloną liczbę p ograniczeń na k-wymiarowy parametr $\theta \in \Theta \subset \mathcal{R}^k$, na przykład:

$$\begin{aligned}
H_0 &: \theta_{i_1} = \alpha_1, \theta_{i_2} = \alpha_2, \ldots, \theta_{i_p} = \alpha_p, \text{ lub} \\
H_0 &: A\theta = b, \text{dla macierzy } A \text{ rozmiaru } p \times k, b \in \mathcal{R}^p \text{ lub} \\
H_0 &: \theta_i = \theta_i\left(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{k-p}\right) \text{ dla znanych } \theta_i(\cdot), (i = 1, 2, \ldots, k) \\
&\quad \text{i } \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{k-p} \text{ do estymacji}
\end{aligned}$$

Jako hipoteza alternatywna występuje $\Theta_1 = \Theta$. Wtedy Θ_1 ma k a Θ_0 - $k-p$ swobodnych parametrów[3]. Zachodzi

Twierdzenie 1.2 *(ogólny, asymptotyczny test ilorazu wariancji) Niech $\Theta_0 \subset \Theta_1$ i $|\Theta_1| - |\Theta_0| = p$. Wtedy w pewnych warunkach, gdy $n \to \infty$ gdy $X^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest próba prostą*

$$2 \lg L_x(H_0, H_1) \sim \chi_p^2$$

przy założeniu, że H_0 jest prawdziwa.

Gdy H_0 nie jest prawdziwa $2 \lg L_x(H_0, H_1)$ ma wartości duże, gdy $n \to \infty$. Test asymptotyczny na poziomie α oparty jest na zbiorze krytycznym $C = \{x : L_x(H_0, H_1) > c\}$ gdzie $\alpha = P\left(\chi_p^2 > c\right)$

W praktycznym stosowaniu będziemy korzystać z poniższego lematu:

Lemat 1.1 *$X^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest próba prostą z rozkładu $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Oznaczmy przez $l(x, \mu, \sigma) \stackrel{def}{=} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)$ funkcję wiarygodności tej próby. Wtedy:*

$$\begin{aligned}
\max\{l(x,\mu,\sigma) : \mu\} &= \left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left(-\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 / 2\sigma^2\right), \\
\max\{l(x,\mu,\sigma) : \sigma\} &= \left(2\pi \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right)^{-n/2} \exp(-n/2), \\
\max\{l(x,\mu,\sigma) : \mu, \sigma\} &= \left(2\pi \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2\right)^{-n/2} \exp(-n/2)
\end{aligned}$$

[3] oznaczmy ten fakt jako: $|\Theta_1| = k$ i $|\Theta_0| = k - p$

Test wartości średniej dla znanej wariancji

$X^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest próba prostą z rozkładu $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, odchylenie standardowe σ jest znane. Testujemy hipotezy:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = \mu_0, \\ H_1 &: \mu \neq \mu_0 \end{aligned}$$

Zgodnie z ogólnym testem ilorazu wariancji iloraz wariancji pozwoli skonstruować zbiór krytyczny.

$$\begin{aligned} L_x(H_0, H_1) &= \frac{\sup\{l(x,\mu,\sigma) : \mu\}}{l(x,\mu_0,\sigma)} = \frac{\left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left(-\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 / 2\sigma^2\right)}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left(-\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 / 2\sigma^2\right)} = \\ &= \exp\left(\frac{n(x_i - \mu_0)^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

Hipotezę H_0 winniśmy odrzucać, gdy $|x_i - \mu_0|$ jest duże, czyli zbiór krytyczny ma postać $C = \{x : |x_i - \mu_0| > c_\alpha\}$ gdzie c_α można wyliczyć z relacji:

$$\alpha = P(|x_i - \mu_0| > c_\alpha) = P\left(\frac{|x_i - \mu_0|}{\sigma} > \frac{c_\alpha}{\sigma}\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{c_\alpha}{\sigma}\right)\right),$$

czyli parametr c_α winien spełniać równanie

$$\Phi\left(\frac{c_\alpha}{\sigma}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Zauważmy, że

$$2 \lg L_x(H_0, H_1) = \frac{n(x_i - \mu_0)^2}{\sigma^2} = nZ^2$$

i Z^2 ma rozkład χ_1^2 gdyż hipoteza H_0 daje jednen warunek na nieznany parametr μ, czyli twierdzenie jest dokładne.