EGZAMIN WRAiT2, 19.06.2017

1. Czy poniższe stwierdzenia są prawdziwe czy fałszywe?
   (a) Funkcja $u(x, y) = 3x^2 - 4y^2 + 1$ jest harmoniczna.
   (b) Funkcja $\mathbb{C} \ni z \mapsto \sin z \in \mathbb{C}$ jest ograniczona.
   (c) Równanie $\mathrm{Log}[(z + i)(z - i)] = 1 + i\pi$ ma dokładnie trzy różne rozwiązania.
   (d) Funkcja $f(z) = \frac{e^{z-5i}}{(z+1)^2}$ ma jeden biegun rzędu 2.
   (e) Jeśli f jest holomorficzna na $\mathbb{C}$, to $\min_{z \in K(0,1)} f(z) > 0$.

   Każdą odpowiedź krótko uzasadnić.

2. Podać przykład lub uzasadnić, że nie istnieje:
   (a) funkcja holomorficzna na $\mathbb{C}$, która nie ma trzeciej pochodnej w $z = 0$;
   (b) szereg potęgowy o obszarze zbieżności $P(0, 1, \infty)$;
   (c) funkcja f i punkt z_0 takie, że z_0 jest biegunem rzędu 2 i $\mathrm{Res}_{z_0} f = -i$;
   (d) przestrzeń unormowana, która nie jest unitarna;
   (e) zbiór trzech wektorów ortonormalnych w przestrzeni $\mathbb{C}^4$ z iloczynem skalarnym $\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^{4} z_i \bar{w}_i$.

3. Dana jest funkcja holomorficzna $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$., Wykazać, że jeśli $u(x, y) = 3v(x, y)$ dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, to f musi być stała.

4. Obliczyć całkę
   $$\int_{|z-\frac{\pi}{4}|=\frac{\pi}{2}} \frac{f(z)}{z^2 \cos z}\, \mathrm{d}z,$$
   jeśli wiadomo, że f jest holomorficzna na $\mathbb{C}$ i $f(0) \neq 0$.

5. Metodami zespolonymi obliczyć całkę
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 4)^2}\, \mathrm{d}x.$$

6. Znaleźć liczbę zer wielomianu $p(z) = z^7 + 3z^3 - z$ w kole $|z| < \frac{1}{3}$.

7. Wykazać, że odwzorowanie
   $$\ell_\infty \ni (x_n)_{n=1}^{\infty} \mapsto \|(x_n)_n\|_\star := \sum_{n=1}^{2018} |x_n| + \sup_{n>2018} |x_n|$$
   jest normą na przestrzeni ℓ_∞. Sprawdzić, czy ciąg o wyrazach $x_n = \frac{1}{3^n}$ ma normę $\|.\|_*$ mniejszą niż 1.

8. Sprawdzić, czy operator
   $$T : \ell^1 \ni (x_n)_n \mapsto \Big(\frac{x_n}{n^2}\Big)_n \in \ell^1$$
   jest poprawnie określony i ciągły. Jeśli tak, to obliczyć jego normę.