Lista 9: σ-ciała zbiorów mierzalnych

Analiza i Topologia, semestr zimowy 2018/2019

1. Niech $(A_n)_n$ będzie ciągiem podzbiorów $\mathbb{R}$. Wykazać, że

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k>n} A_k = \{x \in \mathbb{R} \colon x \in A_k \text{ dla nieskończenie wielu } n\}$$
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k>n} A_k = \{x \in \mathbb{R} \colon \exists_{n_0}\ x \in A_k \text{ dla } k > n_0\}$$

2. Niech $\mathcal{A}$ będzie niepustą rodziną podzbiorów niepustego zbioru X, taką, że (a) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$, (b) $A \in \mathcal{A}$ i $B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$. Uzasadnić, że wtedy $\emptyset \in \mathcal{A}$ i $X \in \mathcal{A}$.

3. Czy istnieje σ-ciało złożone z dokładnie jednego elementu? Dokładnie dwóch elementów? Dokładnie trzech elementów?

4. Wykazać, że przekrój dowolnej rodziny σ-ciał jest σ-ciałem.

5. Wykazać, że jeśli rodzina $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ zawiera się w rodzinie $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ ($B \in \mathcal{B} \Rightarrow B \in \mathcal{C}$), to sigma ciała generowane przez te rodziny także się zawierają: $\sigma(\mathcal{B}) \subset \sigma(\mathcal{C})$.

6. Sprawdzić, czy następujące rodziny sa σ-ciałami:

   (a) $X = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c, d\}\}$.

   (b) $X = \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A$ jest ograniczony lub $X \setminus A$ jest ograniczony.

   (c) $X = \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A$ jest przeliczalny lub $X \setminus A$ jest przeliczalny.

7. Niech $A, B \subset X$ będą niepuste. Jak wygląda σ-ciała podzbiorów X generowane przez A i B, jeśli (a) $A \cap B = \emptyset$, (b) $A \cap B \neq \emptyset$?

8. Niech $X = [-3, 3]$. Znaleźć σ-ciała podzbiorów X generowane przez zbiory:

   (a) $(0, 1)$, (b) $\{-3\}, \{3\}$, (c) $(-1, 0) \cup (1, 3)$, $[1, 2)$.

9. Pokazać, że poniższe rodziny generują rodzinę zbiorów borelowskich:

   (a) rodzina przedziałów otwartych $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$,

   (b) rodzina zbiorów postaci (a, ∞), $a \in \mathbb{Q}$.

10. Niech $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ będzie σ-ciałem i niech $B \subset X$ będzie niepustym zbiorem. Definiujemy

$$(a)\mathcal{A}_B = \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\}, \quad (b)\mathcal{A}^B = \{A \in \mathcal{A} : A \subset B\}$$

    Wykazać, że zarówno $\mathcal{A}_B$, jak i $\mathcal{A}^B$ są σ-ciałami jako rodziny podzbiorów B. Czy są także σ-ciałami jako rodziny podzbiorów X?