Lista 8: Zbiór Cantora i przestrzeń $(C[0,1], d_{\sup})$

Analiza i Topologia, semestr zimowy 2018/2019

1. Zbadać zbieżność punktową i jednostają poniższych ciągów funkcyjnych na $X = [0,1]$:
   (a) $f_n(x) = (\sin x)^n$; (b) $f_n(x) = \ln(e^x + \frac{1}{n})$ (c) $f_n(x) = nx^n(1-x)$; (d) $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}$;
   (e) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n} \text{ jeśli } n \text{ jest parzyste;} \\ \frac{1}{n} \text{ jeśli } n \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$ (f) $f_n(x) = \begin{cases} n^2 \text{ jeśli } x \in [n, 2n]; \\ \frac{1}{3^n} \text{ w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$

2. W przestrzeni $C[0,1], d_{\sup})$ znaleźć wszystkie wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, dla których funkcja f należy do kuli o środku g i promieniu r:
   (a) $f(x) = tx^2$, $g(x) = 4x^2$, $r = 7$;
   (b) $f(x) = tx - \frac{t^2}{2}$, $g(x) = x^2$, $r = 1$.

3. Na przestrzeni $C[0,1]$ definiujemy odwzorowanie
$$d_1(f,g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$
   (a) Udowodnić, że d_1 jest metryką.
   (b) Sprawdzić, czy $f(x) = x^2 + 3x - 9$ leży w kuli $K(g, 4)$ względem tej metryki.
   (c) Sprawdzić, czy $f_n(x) = x^n$ jest ciągiem Cauchy'ego i czy jest zbieżny w tej metryce.
   (d) Wywnioskować, czy metryki $d_{\sup}$ i d_1 na $C[0,1]$ nie są równoważne.

4. Znaleźć domknięcia i wnętrza następujących zbiorów w $(C[0,1], d_{\sup})$:
   (a) $A = \{f \in C[0,1] : f \text{ nie ma miejsc zerowych}\}$
   (b) $A = \{f \in C[0,1] : f(\frac{1}{2}) < f(0)\}$
   (c) $A = \{f \in C[0,1] : f \text{ jest parzysta}\}$

5. Pokazać, że odwzorowanie $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, dane wzorem
$$f\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{3^k}\right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{2k-1}}{3^k}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{2k}}{3^k}\right)$$
   jest homeomorfizmem.

6. Czy istnieją funkcje ciągłe (homeomorfizmy) pomiędzy następującymi przestrzeniami (z metryką euklidesową odpowieniego wymiaru)
   (a) $\mathcal{C}$ oraz $[0,1]^2$; (b) $\mathcal{C}$ oraz $\mathbb{R}^3$; (c) $\mathcal{C}$ oraz $\mathcal{C} \times [0,1]$; (d) $\mathcal{C}$ oraz S^1?