Lista 7: Funkcje ciągłe i homeomorfizmy

Analiza i Topologia, semestr zimowy 2018/2019

1. Wykazać, że zachodzą następujące własności przeciwobrazu: dla $A, B \subset X$, $f : X \to Y$,

   (a) $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$, (b) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.

2. Które z poniższych funkcji są ciągłe? czy są homeomorfizmami?

   (a) $f : (\mathbb{R}^2, d_E) \ni (x_1, x_2) \mapsto x_2 \in (\mathbb{R}, d_E)$,
   (b) $f : (\mathbb{R}^2, d_E) \ni (x_1, x_2) \mapsto x_2 \in (\mathbb{R}, d_D)$,
   (c) $f : (\mathbb{R}^2, d_T) \ni (x_1, x_2) \mapsto (\ln(x_1^2 + x_2^2 + 1), x_1 - x_2) \in (\mathbb{R}^2, d_E)$,
   (d) $f : (\mathbb{R}^2, d_E) \ni (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1) \in (\mathbb{R}^2, d_C)$,
   (e) $f : (\mathbb{R}, d_E) \ni x \mapsto x^3 \in (\mathbb{R}, d_*)$, gdzie metryka d_* jest opisana w zadaniu 6 z listy 2.

3. Podaj przykład funkcji ciagłej $f : X \to Y$ (lub uzasadnij, że nie istnieje), dla której

   (a) przeciwobraz kuli domkniętej jest zbiorem otwartym;
   (b) przeciwobraz zbioru brzegowego nie jest brzegowy;
   (c) obraz zbioru otwartego jest otwarty;
   (d) obraz zbioru zwartego jest nie jest domknięty;
   (e) obraz zbioru niespójnego jest spójny.

4. Czy w poniższych przypadkach istnieje ciągła surjekcja z przestrzeni X na przestrzeń Y?

   (a) $X = ([0, 1], d_E)$, $Y = (\{(x, 2x - 1) \colon x \in \mathbb{R}\}, d_E)$;
   (b) $X = ([0, 4], d_E)$, $Y = ([-3, 1] \cup [2, 3], d_E)$;
   (c) $X = ([0, 1], d_D)$, $Y = ([0, 1], d_T)$;
   (d) $X = ((0, 1], d_E)$, $Y = (\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 3\}, d_E)$;
   (e) $X = ([0, 1], d_E)$, $Y = ([0, 1] \times \{\pi\}, d_R)$;

5. Wykazać, że relacja homeomorficzności przestrzeni metrycznych jest relacją równoważności (jest zwrotna, symetryczna i przechodnia). Poniższe litry podzielić na klasy abstrakcji względem tej relacji:

   A, C, D, E, F, J, L, O, S, T, U, W, Y, Z

6. Niech $f : X \to Y$ jest ciągłą bijekcją. Wykazać, że f^{-1} jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy obrazem dowolnego zbioru otwartego w X jest zbiór otwarty w Y.

7. Podać przykład pary metryk, dla których funkcja $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, d_1) \ni x \mapsto x \in (\mathbb{R}, d_2)$ jest ciągła, ale nie jest homeomorfizmem.

8. Wykazać, że jeśli metryki d_1 i d_2 na X są równoważne, to (X, d_1) i (X, d_2) są homeomorficzne.

9. Spośród podanych zbiorów wybrać przestrzenie homeomorficzne z $\mathbb{R}$:

$$(a,b), \quad [a,b], \quad (-\infty,a), \quad (a,b)\cup(c,+\infty), \quad (a,b)\times\{c\}, \quad (a,b)\times[c,d].$$

10. Wykazać, że pierścień $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 4\}$ i cylinder $B = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1, 0\le z\le 1\}$ (z metryką euklidesową) są homeomorficzne.

    Wskazówka: Zbadać własności funkcji

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2+y^2}-1\right).$$