
Lista 5: Zbiory zwarte, spójne, ośrodkowe

Analiza i Topologia, semestr zimowy 2018/2019

Metrykę euklidesową oznaczamy d_E , metrykę taksówkową d_T , metrykę maximum d_M , metrykę rzeka d_R , metrykę centrum d_C , metrykę dyskretną d_D .

1. Sprawdzić zwartość i spójność zbiorów:

- (a) $A = \{1 - 1/n : n \in \mathbb{N}_1\} \cup \{1\}$ w (\mathbb{R}, d_E) ; (b) $B = \{(x, \frac{1}{x^2+1}) : x \in \mathbb{R}\}$ w (\mathbb{R}^2, d_E) ;
(c) $C = \overline{K_E}((0, 3), 1)$ w (\mathbb{R}^2, d_R) ; (d) $D = K_D((2, 0), 1)$ w (\mathbb{R}^2, d_D) .

2. Opisać wszystkie zbiory spójne na \mathbb{R} z metryką dyskretną. Opisać wszystkie zbiory zwarte na \mathbb{R} z metryką dyskretną. Czy dowolna kula domknięta w (\mathbb{R}, d_D) będzie zbiorem zwartym? Czy istnieje w (\mathbb{R}, d_D) zbiór domknięty i ograniczony, który nie jest zwarty?

3. (Tę przestrzeń metryczną poznaliśmy w zadaniu 6 z listy 2. Teraz zbadamy niektóre z jej własności.) Czy przestrzeń metryczna (\mathbb{R}, d_*) , gdzie

$$d_*(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ |x| + |y|, & x \neq y \end{cases},$$

jest zwarta? Czy jest spójna? Czy jest ośrodkowa?

4. Niech (X, d_1) , (X, d_2) będą przestrzeniami metrycznymi takimi, że $d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$ dla wszystkich $x, y \in X$.

- (a) Udowodnić, że jeśli zbiór A jest zwarty w (X, d_1) , jest zwarty także w (X, d_2) .
(b) Udowodnić, że jeśli (X, d_1) jest ośrodkowa, to (X, d_2) także.

Wskazówka: pokazać, że jeśli A jest ośrodkiem w (X, d_1) , to jest ośrodkiem także w (X, d_2) .

5. Czy w dowolnej przestrzeni metrycznej zachodzą własności:

- (a) wnętrze zbioru spójnego jest zbiorem spójnym?
(b) przekrój zstępującego ciągu zbiorów spójnych jest spójny?
(c) domknięcie zbioru zwartego jest zbiorem zwartym?
(d) suma dwóch zbiorów brzegowych jest zbiorem brzegowym?
(e) zbiór nigdziegęsty jest brzegowy i nie jest gęsty?
(f) nadzbiór zbioru gęstego jest gęsty?

6. Czy (w wybranej przestrzeni metrycznej X) istnieje zbiór A nietrywialny ($A \neq \emptyset$, $A \neq X$) i:

- (a) spójny i niezarty? (e) niespójny i nieograniczony?
(b) zwarty i niespójny? (f) gęsty, którego dopełnienie jest brzegowe?
(c) otwarty i brzegowy? (g) brzegowy, który nie jest brzegiem żadnego zbioru?
(d) domknięty i brzegowy?

7. Podać przykłady lub uzasadnić, że nie istnieje:

- (a) przestrzeń ośrodkowa, która nie jest zwarta;
(b) przestrzeń nieośrodkowa i niespójna;
(c) trójka zbiorów rozłącznych i gęstych w \mathbb{R} .