Lista 3: Wnętrza i domknięcia

Analiza i Topologia, semestr zimowy 2018/2019

1. Znaleźć wnętrze, domknięcie i brzeg następujących zbiorów w $(\mathbb{R}, d_E)$:
   (a) $[-5, 10) \cup (10, 20)$, (b) $\{1 + \frac{k}{n} \colon n \in \mathbb{N}_1, k \in \{0, 1\}\}$, (c) $\sqrt{2}\mathbb{Q} = \{q\sqrt{2}; q \in \mathbb{Q}\}$.

2. Znaleźć wnętrze, domknięcie i brzeg następujących zbiorów w $(\mathbb{R}^2, d_E)$:
   (a) $A = \{-1, 1\} \times \mathbb{Q}$, (b)$[0, 1) \times \{0\}$, (c) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(0, 0)\}$,
   (c) $C = \{4^n, \frac{1}{4n}; n \in \mathbb{N}_1\}$, (d) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$

3. Wyznaczyć wnętrze zbioru $B = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times [0, 1]$ w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ z metryką taksówkową d_T.

4. Znaleźć wnętrze, domknięcie i brzeg zbioru: (a) $(0, 1) \times \{1\}$; (b) $\{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in (-1, 1)\}$ w $\mathbb{R}^2$ z metryką rzeka i w metryką centrum

5. Czy istnieje:
   (a) zbiór $A \subset (\mathbb{R}, d_E)$, taki że $\mathrm{Int}(A) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?
   (b) zbiór $A \subset (\mathbb{R}, d_E)$, taki że $\mathrm{Bd}(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$?
   (c) zbiór $A \subset (\mathbb{R}^2, d_R)$, taki że $\mathrm{Cl}(A) = [-1, 1] \times [0, 5]$?
   (d) zbiór $A \subset (\mathbb{R}, d_E)$, taki że $\mathrm{Int}(\mathrm{Bd}(A)) \neq \emptyset$?
   (e) zbiór $A \subset (\mathbb{R}, d_D)$, taki że $\mathrm{Bd}(A) = \{2018\}$?
   (f) zbiór $A \subset (\mathbb{R}^2, d_E)$ taki że $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) \neq \mathrm{Int}(A)$?

6. Czy prawdziwe są nastepujące zdania?
   (a) Domknięcie kuli otwartej jest zbiorem domkniętym.
   (b) $\mathrm{Cl}(K(a, r)) = \overline{K}(a, r)$.
   (c) $\mathrm{Cl}(K(a, r)) \subset \overline{K}(a, r)$.
   (d) $\mathrm{Int}(A \setminus B) \subset \mathrm{Int}(A) \setminus \mathrm{Int}(B)$.
   (e) $\mathrm{Int}(A \setminus B) = \mathrm{Int}(A) \setminus \mathrm{Int}(B)$.
   (f) Jeśli $A \subset X$ i $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Int}(A)$, to A jest domknięty.

7. Wykazać, że $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$ oraz $\mathrm{Cl}(A \cap B) \subset \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B)$. Podać przykład, że nie zachodzi zawieranie w drugą stronę.

8. Wykazać, że

$$\text{(a)} \quad \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)), \quad \text{(b)} \quad \mathrm{Bd}(\mathrm{Cl}(A)) \subset \mathrm{Bd}(A)$$

   i podać przykład, że zawierania w drugą stronę nie muszą zachodzić.