Lista 14: Przestrzenie unormowane i unitarne

Analiza i Topologia, semestr zimowy 2018/2019

1. Sprawdzić, czy poniższe pary (X, p) są przestrzeniami unormowanymi, a jeśli tak, znaleźć taka metrykę d na X, aby $d(x, y) = p(x - y)$. :
   (a) $X = [0,1] \times [-5, 10]$, $p_1\Big((x, y)\Big) = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$;
   (b) $X = \mathbb{R}^2$, $p_2\Big((x, y)\Big) = 4xy$;
   (c) $X = \mathbb{R}^2$, $p_3((x, y)) = |x| + |y|$;
   (d) $(X, \|.\|)$ – ustalona przestrzeń unormowana, $p_4(x) = \frac{\|x\|}{1+\|x\|}$;
   (e) $X = C[0,1]$, $p_5(f) = \int_0^1 |f(x)|dx$.
2. Sprawdzić, czy poniższe pary (X, s) są przestrzeniami z iloczynem skalarnym, a jeśli tak, to podać normę p taką, że $p(x) = \sqrt{s(x, x)}$:
   (a) $X = \mathbb{R}^2$, $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1$;
   (b) $X = \mathbb{R}^3$, $s((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 7x_3y_3$;
   (c) $X = \mathbb{C}^2$, $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1 + x_2y_2$;
   (d) $X = \mathbb{C}^2$, $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1\bar{y}_1 + ix_2\bar{y}_2$;
3. Wykazać, że żadna norma nie pochodzi od metryki rzeka.
4. Niech $C^1[0, 1] = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f$ ma ciągłą pochodną$\}$. Zbadać, czy:
   (a) odwzorowanie $p : C^1[0, 1] \ni f \mapsto |f(0)| + \int_0^1 |f'(x)|dx$ jest normą na $C^1[0, 1]$;
   (b) odwzorowanie $\langle ., . \rangle : C^1[0, 1]^2 \ni (f, g) \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x)\mathrm{d}x$ definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni $C^1[0, 1]$.
5. Podać (o ile istnieją) po 3 przykłady funkcji równych prawie wszędzie $f(x) = x$ w przestrzeniach (a) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, (b) $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \delta_0)$, (c) $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ (ν – miara licząca).
6. Wykazać, że jeśli ciąg $(f_n)_n \subset C[0, 1]$ jest zbieżny w normie supremum $\|.\|_\infty$, to jest także zbieżny w normie całkowej $\|.\|_1$. Podać przykład na to, że nie zachodzi implikacja odwrotna.
7. Podać przykład funkcji ciagłej f należącej do $L^2[1, +\infty]$ i nienależącej do $L^1[1, +\infty]$. Czy da się znaleźć taki przykład na $[0, 1]$?
8. Czy standardowe normy supremowa i jedynkowa w przestrzeni $C([0, 1])$ pochodzą od iloczynów skalarnych? Czy przestrzeń $(L^1[0, 1], \|.\|_1)$ jest przestrzenią Hilberta?
9. Sprawdzić, że w przestrzeni $L_2[0, 1]$ funkcje $f_n(t) = \sin(2\pi nt)$ i $g_n(t) = \cos(2\pi nt)$, $n \geqslant 1$, są parami ortogonalne, tzn. $\langle f_n, g_m\rangle = 0$, $\langle f_n, f_m\rangle = 0$, $\langle g_n, g_m\rangle = 0$ dla $n \neq m$.