Lista 13: Twierdzenia całkowe

Analiza i Topologia, semestr zimowy 2018/2019

1. Obliczyć poniższe granice, powołując się na odpowiednie twierdzenia graniczne dla całki

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{\sin nx}{x^2+nx}d\lambda(x) \quad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{2n^3x+5n+4}{n^3x+2n}d\lambda(x), \quad \text{(iii)} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2\ln(1+\frac{x}{n})}d\lambda(x).$$

2. Wykazać, że

$$\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}\mathbf{1}_{[n,n+1]}d\lambda < \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{[n,n+1]}d\lambda,$$

gdzie $\mathbf{1}_A$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A. Wyjaśnić, dlaczego fakt ten nie stoi w sprzeczności ani z twierdzeniem Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej ani z twierdzeniem Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.

3. Rozważając przestrzeń $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, ν = miara licząca na $\mathbb{N}$ i funkcje $f_n(k) = \frac{1}{n}1_{\{1,2,\ldots,n\}}(k)$, sprawdzić, że założenie o ograniczoności w twierdzeniu Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej jest istotne.

4. Wykazać "lemat Fatou dla funkcji dowolnego znaku": Niech $(X,\mathcal{A},\mu)$ będzie przestrzenia $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, będą funkcjami $\mathcal{A}$-mierzalnymi. Jeśli istnieje $g \geq 0$ $\mathcal{A}$-mierzalna, μ-całkowalna i taka, że $|f_n(x)| \leq g(x)$ dla każdego $x \in X$, to

$$\int_X \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu.$$

Wskazówka: Patrz dowód twierdzenia Labesgue'a z wykładu.

5. Zauważyć, że lemat Fatou nie jest w ogólności prawdziwy bez założenia nieujemności funkcji.

6. (Twierdzenie Lebesgue'a w wersji dla szeregów) Niech $(f_n)_n$ będzie takim ciągiem funkcji całkowalnych, że $\sum_{n=1}^{\infty}\int|f_n|d\mu < \infty$. Udowodnić, że szereg $\sum_n f_n$ jest zbieżny prawie wszędzie i

$$\int_X\sum_{n=1}^{\infty}f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n d\mu.$$

7. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}\lambda$, jeśli $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n\mathbf{1}_{A_n}$, $A_n = (n, n+\frac{1}{9^n})$.

8. Uzasadnić, że $\mathcal{P}(\mathbb{N})\otimes\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ oraz wykazać, że miara produktowa dwóch miar liczących na $\mathbb{N}$ jest miarą liczącą na $\mathbb{N}^2$.

9. Rozpatrujemy przestrzeń $\mathbb{R}\times\mathbb{N}$ z σ-ciałem $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{P}(\mathbb{N})$; λ oznacza 1-wymiarowa miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}$, ν – miarę liczącą na $\mathbb{N}$, δ_a - miarę Diraca w a (na $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{N}$). Sprawdzić, czy:

   (a) $\delta_a\otimes\delta_b = \delta_{(a,b)}$,

(b) $\delta_a \otimes \nu(A) = |A_a|$, gdzie $|A_a|$ oznacza liczność x-przekroju zbioru A w punkcie a.

(c) $\lambda \otimes \lambda(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y \in \mathbb{Q}\}) = 1$,

(d) $\lambda \otimes \nu(\{(x,m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} : x \leq m\}) = \infty$.

10. Niech $X = Y = [0,1]$, λ oznacza miarę Lebesgue'a na X, ν oznacza miarę liczącą na Y. Definiujemy funkcję
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}.$$
Sprawdzić, że f jest funkcją mierzalną oraz że całki iterowane $\int_X \int_Y f(x,y) d\nu(y) d\mu(x)$ i $\int_Y \int_X f(x,y) d\mu(x) d\nu(y)$ nie są sobie równe. Dlaczego?

11. Korzystając z twierdzenia Tonellego, obliczyć całkę
$$\int_A \frac{1}{(2-x)(y+1)} d\lambda_2(x,y),$$
gdy $A = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.