Lista 12: Całka Lebesgue'a

Analiza i Topologia, semestr zimowy 2018/2019

W poniższych zadaniach zakładamy, że $(X, \mathcal{A}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą, czyli $X \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ jest σ-ciałem, a μ dowolną ustaloną miarą na $(X, \mathcal{A})$. λ oznacza miarę Lebesgue'a, δ_x oznacza miarę Diraca (skupioną w punkcie x).

1. Wykazać, że dla dowolnej funkcji μ-całkowalnej f i dla dowolnych zbiorów $A, B \in \mathcal{A}$ rozłącznych ($A \cap B = \emptyset$) zachodzi
$$\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

2. Wykazać, że jeśli dla funkcji nieujemnej mierzalnej f całka $\int_X f d\mu$ jest równa zero, to $f = 0$ μ-prawie wszędzie. *Wskazówka:* Zauważyć, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $f \geq f_n = \frac{1}{n} 1_{B_n}$, gdzie $B_n = \{x \in X : f(x) > \frac{1}{n}\}$.

3. Obliczyć całkę z funkcji prostej nieujemnej na zbiorze A względem miary Lebesgue'a, gdy:

   (a) $A = [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}, \\ 2, & \text{jeśli } x \in (\frac{1}{2}, 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ 3, & \text{jeśli } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

   (b) $A = [-10, 10)$, $f(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}_1} k^2 1_{[k,k+\frac{1}{2})}(x)$;

   (c) $A = [0, \infty)$, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1_{[k,k+1)}(x)}{3^k}$, $n \in \mathbb{N}$;

   (d) $A = [0, n]$, $f(x) = [x]$, $n \in \mathbb{N}$;

   (e) $A = [0, e^{10}]$, $f(x) = [\ln x]$;

   (f) $A = [0,1]$, $f(x) = [n\,x]$, $n \in \mathbb{N}$;

4. Niech $A_n = (3^n, 3^n + 2n) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ oraz $t > 0$. Definiujemy $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz funkcję
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-t)^n 1_{A_n}(x).$$

   (a) Uzasadnić, że funkcja f jest mierzalna i wyznaczyć f^+ i f^- dla funkcji f.

   (b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ funkcja f jest całkowalna? Obliczyć $\int_A f d\lambda$.
   Wskazówka: ciąg funkcji aproksymujących można wyznaczyć biorąc skończoną liczbę wyrazów szeregu definiującego funkcję.

5. Oblicz całkę $\int_{[0,1]} f \mathrm{d}\lambda$, jeśli $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ przyjmuje wartość n na przedziałach długości $\frac{1}{3^n}$ wyrzucanych przy konstrukcji zbioru Cantora, zaś w punktach zbioru Cantora przyjmuje wartość e^{13}.

6. Obliczyć całki Lebesgue'a $\int_A f d\lambda$ (bez przybliżania funkcjami prostymi), jeśli:

   (a) $A = \{n \in \mathbb{N} : n^3 + 2n \leq 50\}$, $f(x) = xe^{x^2-1}$;

   (b) $A = \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln(|x|+1), & \text{jeśli } x \in \mathbb{Q}, \\ (1+x^2)^{-2}, & \text{jeśli } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$

   (c) $A = [0,1]$, $\mathcal{C}$ jest zbiorem Cantora,
   $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{jeśli } x \in (0, \frac{1}{2}) \setminus \mathcal{C}, \\ \cos(\pi x) & \text{jeśli } x \in (\frac{1}{2}, 1) \setminus \mathcal{C}, \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{jeśli } x \in \mathcal{C}. \end{cases}$

7. Obliczyć całkę $\int_{\mathbb{R}}[x]\mathrm{d}\mu$ oraz $\int_{[-3,3]}\ln(x+3)\mu$, gdzie $\mu = \frac{1}{3}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-2}$.

8. Rozważamy przestrzeń $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ z miarą liczacą, tzn. $\nu(A) = \begin{cases} n, & \text{gdy } |A| = n \\ \infty, & \text{gdy } |A| = \infty \end{cases}$.
   Obliczyć całkę $\int_{\mathbb{N}}(x+x^2)\mathrm{d}\nu$. *Wskazówka:* Oszacować funkcję podcałkową od dołu przez funkcję prostą, której całkę łatwo policzyć.