Lista 10: Miary

Analiza i Topologia, semestr zimowy 2018/2019

1. Załóżmy, że $(X, \mathcal{A}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą. Zbadać, czy prawdziwe są następujące własności:

   (a) $\mu(A) = \mu(B) \Rightarrow A = B$,

   (b) $\mu(A) \leq \mu(B) \Rightarrow A \subset B$,

   (c) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$,

   (d) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) = \mu(B) - \mu(B \setminus A)$,

2. Niech $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Czy odwzorowanie dane wzorem

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A \text{ skończony}, \\ +\infty, & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases}$$

   jest miarą na $(X, \mathcal{A})$?

3. Niech X będzie zbiorem skończonym. Sprawdzić, że wzór $\mu(A) = \frac{|A|}{|X|}$ określa miarę probabilistyczną na $(X, \mathcal{P}(X))$.

4. Niech $a = (a_n)_n$ będzie pewnym ciągiem liczb rzeczywistych. Na przestrzeni $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ definiujemy funkcję

$$\mu_a(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ \sum_{n \in A} a_n, & A \neq \emptyset. \end{cases}$$

   (a) Dla jakich $(a_n)_n$ μ_a jest miarą na $\mathbb{N}$?

   (b) Kiedy μ_a jest miarą skończoną? A kiedy σ-skończoną?

   (c) Dla jakich $(a_n)_n$ powyższy wzór definiuje miarę liczącą?

   (d) Niech $a_n = \frac{1}{2^n}$. Pokazać, że wówczas zbiór wartości μ pokrywa się z przedziałek $[0, 1]$. Czy z faktu, że $\mu(A) = \mu(B)$ wynika, że $A = B$?

5. Załóżmy, że X jest niepustym zbiorem oraz że mamy funkcję $f\colon X \to [0, \infty]$. Zdefiniujmy $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ wzorem

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ \sum\limits_{x \in A} f(x), & \text{jeśli } A \text{ jest co najwyżej przeliczalny}, \\ \infty, & \text{jeśli } A \text{ jest nieprzeliczalny}. \end{cases}$$

   Pokazać, że μ jest miarą.

6. Wykazać, że $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zstępującym ciągiem zbiorów mierzalnych takim, że $\mu(A_1) < +\infty$, to

$$\mu\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n).$$

   Uzasadnić istotność założenia $\mu(A_1) < +\infty$, tzn. podać przykład zstępującego ciągu zbiorów $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dla który zachodzi jedynie nierówność $\mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) < \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$.

7. Niech $\mu, \nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ będą miarami probabilistycznymi na X.

   (a) Wykazać, że dla $a, b > 0$ funkcja $\kappa = a\mu + b\nu$, czyli
   $$\kappa(A) := a\mu(A) + b\nu(A), \quad A \in \mathcal{A},$$
   jest miarą na X.

   (b) Kiedy κ jest miarą probabilistyczną?

   (c) Czy funkcja $\mu(A) = \begin{cases} 0, & 2018 \notin A \text{ i } -2018 \notin A \\ 1, & (2018 \in A \text{ i } -2018 \notin A) \text{ lub } (2018 \notin A \text{ i } -2018 \in A) \\ 2, & 2018 \in A \text{ i } -2018 \in A \end{cases}$
   jest miarą na $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$?

8. Przez 1_A oznaczamy indykator (funkcję charakterystyczną) zbioru A. Funkcją prostą nazywamy funkcję o skończonym zbiorze (skończonych) wartości. Taką funkcję można zawsze zapisać w postaci $f = \sum_{k=1}^{n} c_k 1_{A_k}$, gdzie $c_k \in \mathbb{R}$ są parami różne, a zbiory $A_k = f^{-1}[\{c_k\}]$ są parami rozłączne.

   (a) Sprawdzić, że zachodzą równości
   $$1_{A\cup B}(x) = 1_A(x) + 1_B(x) - 1_{A\cap B}(x), \qquad 1_{A\cap B}(x) = 1_A(x)1_B(x).$$

   (b) Wykazać, że jeśli $f = \sum_{k=1}^{n} b_k 1_{B_k}$, gdzie niekoniecznie $b_k \in \mathbb{R}$ są parami różne i niekoniecznie B_k są parami rozłączne, to f jest funkcją prostą.

   (c) Sprawdzić, że rodzina funkcji prostych jest zamknięta na kombinacje liniowe, mnożenie i branie modułu.

   (d) Wykazać, że funkcja prosta $f = \sum_{k=1}^{n} c_k 1_{A_k}$ ($A_k \cap A_m = \emptyset$ dla $k \neq m$) jest mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ze zbiorów A_k jest mierzalny.