KOLOKWIUM 1 – GRUPA A

Analiza i Topologia, 5.12.2018

Metryką euklidesową oznaczamy d_E, metrykę taksówkową d_T, metrykę rzeka d_R (rzeka na osi $0x$), metrykę centrum d_C (centrum w początku układu współrzędnych), metrykę dyskretną d_D.

1. Czy poniższe zdania są prawdziwe w dowolnej przestrzeni metrycznej? Odpowiedź krótko uzasadnić.
   (a) [2pkt] Brzeg dowolnego zbioru otwartego jest zbiorem domkniętym.
   (b) [2pkt] Istnieje zbiór, który jest otwarty i zwarty.
   (c) [2pkt] Każda przestrzeń ośrodkowa jest spójna.
   (d) [2pkt] W przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_E)$ jeśli zbiór jest domknięty, ale nie jest zwarty, to musi być nieograniczony.
   (e) [2pkt] Suma przeliczalnej liczby zbiorów zwartych jest zwarta.

2. Niech (X, d_1) i (X, d_2) będą przestrzeniami metrycznymi i niech
$$\widehat{d}(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y), \quad x, y \in X.$$
   (a) [6pkt] Wykazać, że $(X, \widehat{d})$ jest przestrzenią metryczną.
   (b) [4pkt] Udowodnić, że jeśli zbiór A jest ograniczony w przestrzeniach (X, d_1) i (X, d_2), to A jest ograniczony w $(X, \widehat{d})$.

3. Rozpatrujemy przestrzeń metryczną $(\mathbb{R}, \rho)$, gdzie
$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1 + |x-1| + |y-1|, & x \neq y \end{cases}.$$
   (a) [3pkt] Wyznaczyć kule otwarte $K(0, 1)$, $K(0, \frac{5}{2})$ i $K(1, 2)$ w tej przestrzeni metrycznej.
   (a) [4pkt] Wykazać, że ciąg $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ jest zbieżny w metryce ρ wtedy i tylko wtedy, gdy jest od pewnego miejsca stały.
   (a) [3pkt] Czy $(\mathbb{R}, \rho)$ jest ośrodkowa?

4. Wyznaczyć wnętrza i domknięcia podanych zbiorów w zadanych przestrzeniach metrycznych:
   (a) [4pkt] $(-2, 1) \times \mathbb{Q}$ w $(\mathbb{R}^2, d_E)$,
   (b) [4pkt] $(2, 3) \times (1, 2)$ w $(\mathbb{R}^2, d_R)$,
   (c) [4pkt] $\mathbb{Q}$ w $(\mathbb{R}, d_D)$,
   (d) [4pkt] $\{\frac{7}{5}\} \times (0, 1)$ w $((0, +\infty)^2, d_E)$.

KOLOKWIUM 1 – GRUPA B

Analiza i Topologia, 5.12.2018

Metryką euklidesową oznaczamy d_E, metrykę taksówkową d_T, metrykę rzeka d_R (rzeka na osi $0x$), metrykę centrum d_C (centrum w początku układu współrzędnych), metrykę dyskretną d_D.

1. Czy poniższe zdania są prawdziwe w dowolnej przestrzeni metrycznej? Odpowiedź krótko uzasadnić.
   (a) [2pkt] Brzeg dowolnego zbioru domkniętego jest zbiorem otwartym.
   (b) [2pkt] Istnieje przestrzeń ośrodkowa, która nie jest spójna.
   (c) [2pkt] Nie istnieje zbiór, który jest otwarty i zwarty.
   (d) [2pkt] W przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_E)$ jeśli zbiór jest ograniczony, ale nie jest zwarty, to nie może być domknięty.
   (e) [2pkt] Suma przeliczalnej liczby zbiorów zwartych jest zwarta.

2. Niech (X, d_1) i (X, d_2) będą przestrzeniami metrycznymi i niech
$$\widehat{d}(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y), \quad x, y \in X.$$
   (a) [6pkt] Wykazać, że $(X, \widehat{d})$ jest przestrzenią metryczną.
   (b) [4pkt] Udowodnić, że jeśli zbiór A jest ograniczony w przestrzeniach (X, d_1) i (X, d_2), to A jest ograniczony w $(X, \widehat{d})$.

3. Rozpatrujemy przestrzeń metryczną $(\mathbb{R}, \rho)$, gdzie
$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1 + |x+1| + |y+1|, & x \neq y \end{cases}.$$
   (a) [3pkt] Wyznaczyć kule otwarte $K(0, 1)$, $K(0, \frac{5}{2})$ i $K(-1, 2)$ w tej przestrzeni metrycznej.
   (a) [4pkt] Wykazać, że ciąg $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ jest zbieżny w metryce ρ wtedy i tylko wtedy, gdy jest od pewnego miejsca stały.
   (a) [3pkt] Czy $(\mathbb{R}, \rho)$ jest zwarta?

4. Wyznaczyć wnętrza i domknięcia podanych zbiorów w zadanych przestrzeniach metrycznych:
   (a) [4pkt] $\mathbb{Q} \times (-1, 1)$ w $(\mathbb{R}^2, d_E)$,
   (b) [4pkt] $(1, 2) \times (2, 3)$ w $(\mathbb{R}^2, d_R)$,
   (c) [4pkt] $\mathbb{Q}$ w $(\mathbb{R}, d_D)$,
   (d) [4pkt] $(0, 1) \times \{\pi\}$ w $((0, +\infty)^2, d_E)$.