Imię i nazwisko

1	2	3	4	5	Suma
10	10	10	10	10	50

KOLOKWIUM 2 WRAiT2, 1.06.2017

1. Podać przykład lub stwierdzić, że nie istnieje:
   (a) szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ zbieżny na okręgu o promieniu 4 i rozbieżny w punkcie $z = 2 - i$;
   (b) para funkcji f i g oraz punkt z_0 takie, że f ma w z_0 biegun rzędu 2, g jest holomorficzna w z_0 i $g(z_0) \neq 0$, a $\frac{f}{g}$ ma w z_0 biegun rzędu 1;
   (c) funkcja f i punkt z_0, takie że z_0 jest biegunem rzędu 2 dla f i $\operatorname{Res}[f; z_0] = 3i$;
   (d) liczba rzeczywista $a \in \mathbb{R}$ taka, że moduł funkcji $f(z) = 2z^2 + a - 3i$ przyjmuje swoje minimum na zbiorze $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ we wnętrzu koła (tj. w punkcie z_0 o module $|z_0| < 1$);
   (e) ciąg $a = (a_n)_n$ należący do przestrzeni ℓ_3 i nienależacy do ℓ_1.

   Każdą odpowiedź krótko uzasadnić.

2. Funkcję $f(z) = \dfrac{7}{(z-2)(z+3)}$ rozwinąć w
   (a) szereg potęgowy o środku w $z_0 = 0$;
   (b) szereg Laurenta o środku $z_0 = 2$.

   Określić obszary zbieżności otrzymanych szeregów.

3. Obliczyć całkę
$$\int_{|z|=2} \frac{z\mathrm{d}z}{(z-1)^2(e^z - i)}.$$

4. Sprawdzić, dla jakiego parametru $a > 0$ wielomian postaci
$$p(z) = z^3 - 5iz + a$$
   ma wszystkie pierwiastki w kole $K(0, a)$.

5. Pokazać, że odwzorowanie dane wzorem
$$\|f\|_* = |f(0)| + + \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \quad f \in C[0,1],$$
   jest normą na $C[0,1]$ oraz obliczyć $\|f\|_*$, gdy $f(x) = x^2 - 2x - 2$.