Imię i nazwisko

1	2	3	4	5	6	7	8	Suma
10	10	10	10	10	10	10	10	80

EGZAMIN WRAiT2, 19.06.2017

1. Czy poniższe stwierdzenia są prawdziwe czy fałszywe?

   (a) Funkcja $f(z) = e^z$ jest różnowartościowa na zbiorze $|z| < 2\pi$.

   (b) Dla każdego $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ zachodzi $\mathrm{Log}(\bar{z}) = \overline{\mathrm{Log}(z)}$.

   (c) Jeśli $\int_{|z|=2} f(z)\mathrm{d}z \neq 0$, to f nie jest holomorficzna.

   (d) Istnieje $z_0 \in \mathbb{C}$ oraz funkcja f holomorficzna w otoczeniu pierścieniowym punktu z_0 taka, że f ma w z_0 biegun i $\frac{f'}{f}$ ma w z_0 biegun rzędu 2.

   (e) Każda przestrzeń unitarna jest unormowana.

   Każdą odpowiedź krótko uzasadnić.

2. Dana jest funkcja $u(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 2y - 1$, $x, y \in \mathbb{R}$. Znaleźć funkcję holomorficzną $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dla której u jest częścią rzeczywistą. Wyznaczyć f jako funkcję zmiennej z.

3. Wyznaczyć obszar zbieżności szeregów potęgowych i zbadać zachowanie na brzegu koła zbieżności:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n(z+1)^n}{n+1}$,

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n z^{2n}}{n^3}$.

4. Znaleźć wszystkie punkty osobliwe izolowane w $\mathbb{C}$ funkcji f i określić ich charakter, gdy

   (a) $f(z) = \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}z)}{(z-i)^3(z+1)}$,

   (b) $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z+3i}}}{\sin z}$.

5. Znaleźć wszystkie wartości, które może przyjąć całka

$$\int_\gamma \frac{z^2+2}{(z-1)^2(z+3i)}\,\mathrm{d}z,$$

   jeśli γ jest krzywą regularną zamkniętą, nieprzechodzącą przez punkty 1 oraz $-3i$.

6. Metodami zespolonymi obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

7. Wykazać, że wzór

$$\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}\,t$$

definiuje iloczyn skalarny na przestrzeni $C^1[0,1]$, wszystkich funkcji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, które mają ciągłą pochodną.

8. W przestrzeni $\mathbb{C}^3$ dane są wektory $e = \left((\frac{i}{2})^n\right)_{n=1}^3$ i $f = (1, i, 0)$. Znaleźć (przynajmniej jeden) wektor $g = (z_1, z_2, z_3)$, który jest ortogonalny do obu wektorów ($g \perp e$ i $g \perp f$) i unormowany ($\|g\| = 1$).