Powtórka przed egzaminem

WRAiT 1, semestr zimowy 2017/2018

1. Znaleźć wszystkie wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, dla których punkt P należy do podanej kuli w przestrzeni X:
   (a) $X = (\mathbb{R}^2, d_R)$, $P = (t, 0)$, kula $K((5,4), 6)$;
   (b) $X = (\mathbb{R}^2, d_D)$, $P = (t^2 - 1, t^2 + 1)$, kula $K((3,5), 1/2)$;
   (c) $X = (\mathbb{R}^2, d_C)$, $P = (t, t)$, kula $K((3,3), 5)$;
   (d) $X = C[0,1]$, $P = f$, gdzie $f(x) = tx^2$, kula $K(g, 5)$, gdzie $g(x) = 4x^2$.

2. Niech (X, d_1), (X, d_2) będą przestrzeniami metrycznymi takimi, że $d_2(x,y) \leqslant d_1(x,y)$ dla wszystkich $x, y \in X$.
   (a) Sprawdzić, że powyższe założenie jest spełnione dla
      - $X = \mathbb{R}$, $d_1 = d_T$, $d_2(x,y) = \min\{1, d_E(x,y)\}$;
      - $X = \mathbb{R}^2$, $d_1 = d_E$, $d_2(x,y) = \frac{d_E(x,y)}{1+d_E(x,y)}$.

   (b) Udowodnić, że jeśli zbiór A jest ograniczony w (X, d_1), to jest ograniczony w (X, d_2). Czy odwrotna implikacja jest prawdziwa?
   (c) Udowodnić, że jeśli (X, d_1) jest ośrodkowa, to (X, d_2) także.
   Wskazówka: pokazać, że jeśli A jest ośrodkiem w (X, d_1), to jest ośrodkiem także w (X, d_2).
   (d) Udowodnić, że jeśli zbiór A jest zwarty w (X, d_1), jest zwarty także w (X, d_2).

3. Stwierdzić, czy poniższe obiekty istnieją.
   (a) Zbiór A, który jest otwarty w $(\mathbb{R}^2, d_C)$ i domknięty w $(\mathbb{R}^2, d_E)$.
   (b) Niezupełna przestrzeń (X, d) taka, że X jest zbiorem skończonym.
   (c) Zbiór A w $(\mathbb{R}^2, d_E)$ taki, że $\operatorname{Cl} A \neq \operatorname{Int} \operatorname{Cl} A$.
   (d) Zbiór A w $(\mathbb{R}^2, d_E)$, który jest niespójny i nieograniczony.
   (e) Zbiór A, który nie jest gęsty w $(\mathbb{R}, d_E)$ i $\mathbb{Q} \subset A$.
   (f) Para przestrzeni (X, d_1), (Y, d_2) o następującej własności: niech $y_0 \in Y$, funkcja $f : X \to Y$ taka, że $f(x) = y_0$ dla każdego $x \in X$ nie jest ciągła.
   (g) Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że f i f^{-1} są kontrakcjami.
   (h) Funkcje ciągłe $f, g : (\mathbb{R}, d_E) \to (\mathbb{R}, d_E)$ takie, że funkcja $h(x,y) = f(x)g(y)$ nie jest ciągła jako funkcja $(\mathbb{R}^2, d_E) \to (\mathbb{R}^2, d_E)$.

4. Niech funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana za pomocą macierzy $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, tj.

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(a) Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Czy funkcja f zadana jak wyżej jest ciągła z $(\mathbb{R}^2, d_E)$ do $(\mathbb{R}^2, d_T)$? Czy jest homeomorfizmem?

(b) Jaki warunek musi spełniać macierz, aby funkcja zadana jak powyżej była homeomorfizmem?

(c) Podać przykład macierzy A takiej, że funkcja f nie jest ciągła jako funkcja z $(\mathbb{R}^2, d_E)$ do $(\mathbb{R}^2, d_R)$.

(d) Podać przykład macierzy A takiej, że funkcja f jest kontrakcją jako funkcja z $(\mathbb{R}^2, d_E)$ do $(\mathbb{R}^2, d_E)$.

5. (a) Podać przykład homeomorfizmu $f : (\mathbb{R}, d_E) \to ((0,1), d_E)$.

   (b) Udowodnić, że jeśli f jest homeomorfizmem między $(\mathbb{R}, d_E)$ i $((0,1), d_E)$, to funkcja

$$h(x) = e^{f(x)}$$

   jest ciągła.

   (c) Udowodnić, że funkcja h zdefiniowana wyżej **nie** jest homeomorfizmem między $(\mathbb{R}, d_E)$ i $(\mathbb{R}, d_E)$.

6. Zbadać zbieżność punktową i jednostajną poniższych ciągów funkcji.

   (a) $f_n(x) = \frac{n+\cos(n^2x)}{3n+5}$;

   (b) $f_n(x) = (\sin(x))^n$;

   (c) $f_n(x) = \begin{cases} n^2 \text{ jeśli } x \in [n, 2n]; \\ \frac{1}{3^n} \text{ w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$

7. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną taką, że $\mathrm{diam} X < \infty$, ustalmy $x_0 \in X$.

   (a) Udowodnić, że funkcja $f : (X, d) \to (\mathbb{R}, d_E)$ zadana wzorem $f(x) = d(x_0, x)^3 + 1$ jest ciągła. Czy jest jednostajnie ciągła? Czy spełnia warunek Lipschitza?

   (b) Niech $C = 4 \cdot \mathrm{diam} X$. Udowodnić, że funkcja $f : (X, d) \to (\mathbb{R}, d_E)$ zadana wzorem $f(x) = C^{-1} d(x_0, x)^2$ jest kontrakcją.

   (c) Czy istnieje przestrzeń zupełna (X, d) taka, że funkcja f z poprzedniego podpunktu nie ma punktu stałego?

8. Czy poniższe zdania są prawdziwe?

   (a) Istnieje przestrzeń z miarą $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ taka, że $\mu(\mathbb{R}) = 3$.

   (b) Rodzina zbiorów borelowskich na prostej jest przeliczalna.

   (c) Istnieje 10-elementowe σ-ciało.

   (d) Każda funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest $\mathcal{P}(\mathbb{R})$-$\mathcal{P}(\mathbb{R})$-mierzalna (mierzalna względem tego samego σ-ciała $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ w dziedzinie i w obrazie).

   (e) Jeśli f jest funkcją borelowską, to zbiór $A = \{x : 1 < f(x) \leqslant 3\}$ jest borelowski.

   (f) Każdy zbiór zwarty w $(\mathbb{R}, d_E)$ ma skończoną miarę Lebesgue'a.

   (g) Każdy zbiór brzegowy w $(\mathbb{R}, d_E)$ ma miarę Lebesgue'a zero.

(h) Jeśli zbiory A, B są borelowskie, to $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$.

(i) Każda funkcja prosta jest całkowalna.

9. Niech $A_n = (2^n, 2^n + n) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ oraz $t \in \mathbb{R}$. Definiujemy $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz funkcję

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \mathbb{1}_{A_n}(x).$$

(a) Uzasadnić, że zbiory A_n oraz A są mierzalne.

(b) Wyznaczyć f^+ i f^- dla funkcji f.

(c) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ funkcja f jest całkowalna?
Wskazówka: ciąg funkcji aproksymujących można wyznaczyć biorąc skończoną liczbę wyrazów szeregu definiującego funkcję.

10. Wiadomo, że $\int_{-2k\pi}^{2k\pi} \sin(x)\, dx = 0$ dla każdej liczby całkowitej k. Czy to oznacza, że funkcja $f(x) = \sin(x)$ jest całkowalna i $\int f\, d\lambda = 0$?

11. Niech A będzie dowolnym podzbiorem $\mathbb{R}$. Definiujemy

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ dla } x \in \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{1+x^2} \text{ dla } x \in \operatorname{Int} A \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{x^2}{2} \text{ dla } x \in \operatorname{Cl} A \setminus (\mathbb{Q} \cup \operatorname{Int} A), \\ 0 \text{ dla pozostałych } x. \end{cases}$$

(a) Uzasadnić, że funkcja f jest borelowska.

(b) Obliczyć $\int f\, d\lambda$ dla $A = (2, 3)$.

(c) Czy istnieje zbiór A, dla którego funkcja f jest całkowalna i $\int f\, d\lambda < 0$?

(d) Podać przykład zbioru A, dla którego f jest niecałkowalna.

(e) Uzasadnić, że jeśli A jest zwarty, to f jest całkowalna.

12. Niech $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Definiujemy

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 \text{ jeśli } 1, 2 \notin A, \\ \frac{1}{3} \text{ jeśli } 1 \in A, 2 \notin A, \\ \frac{1}{4} \text{ jeśli } 2 \in A, 1 \notin A, \\ t \text{ w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

(a) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ funkcja μ jest miarą? Czy da się dobrać t tak, aby μ było miarą probabilistyczną?

(b) Definiujemy

$$f(x) = [x]^3 \mathbb{1}_{[0,10]}(x).$$

Uzasadnić, że f jest funkcją prostą-nieujemną.

(c) Dla t dobranego w części (a) obliczyć całkę $\int_X f\, d\mu$.

13. Rozważmy następujący ciąg funkcji:

$$f_n(x) = \begin{cases} e^{-\frac{nx+4}{5n+1} - x^3 \sin^2(x/n)} \text{ dla } x > 1, \\ 0 \text{ w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

(a) Uzasadnić, że powyższe funkcje są mierzalne.

(b) Znaleźć funkcję f będącą granicą punktową powyższego ciągu funkcji. Czy f jest funkcją mierzalną? Czy f jest całkowalna?

(c) Obliczyć $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda$. *Wskazówka:* nie wyliczać całek bezpośrednio! Skorzystać z odpowiedniego twierdzenia granicznego dla całek.

14. Niech A będzie kulą o środku w 0 i promieniu 1 w metryce taksówkowej. Definiujemy

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 \text{ dla } x \in \mathcal{C} \times \mathbb{Q}, \\ y^3 e^{x^3} \text{ dla } (x,y) \in A \setminus \mathcal{C} \times \mathbb{Q}, \\ 0 \text{ w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Obliczyć całkę $\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda$. *Wskazówka:* kule w metryce taksówkowej są symetryczne.