Lista powtórkowa 2

WRAiT 1, semestr zimowy 2017/2018

1. Zbadać, czy funkcja $f(x) = \frac{x}{1+ex}$ dla $\in [0, \infty)$ jest jednostajnie ciągła oraz czy spełnia warunek Lipschitza.

2. Niech $(x_n)_n, (y_n)_n$ będą ciągami Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej (X, d) i niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza. Definiujemy ciąg liczbowy

$$a_n := f(d(x_n, y_n)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pokazać, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny w $(\mathbb{R}, d_E)$.

Czy wystarczy założyć, że f jest jednostajnie ciągła?

3. Dane są funkcje $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{n}, & x \in [0, n^2], \\ 0, & x > n^2. \end{cases}$$

   (a) Wykazać, że ciąg $(f_n)_n$ jest zbieżny punktowo do $f = 2$.

   (b) Czy jest zbieżny jednostajnie?

4. Czy zbiór $A = \{f \in C[0, 1] : f(0) = 1\}$ jest otwarty lub domknięty w $(C[0, 1], d_{sup})$?

5. Niech $X \neq \emptyset$ i $E \subset X$ będzie niepustym zbiorem. Czy $\mathcal{A} := \mathcal{P}(X) \setminus \{E\}$ jest σ-ciałem na X? Czy $\mathcal{B} := \mathcal{P}(X) \setminus \{E, X \setminus E\}$ jest σ-ciałem na X?

6. Zbadać, czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x < 0, \\ \sin(3x - 1), & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ x \ln x, & x > 1. \end{cases}$$

jest mierzalna względem miary Lebesgue'a.

Wskazówka: przedstawić f w postaci $f_1 \cdot 1_{A_1} + \ldots + f_k \cdot 1_{A_k}$.

7. Pokazać, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza z pewną stałą L, a zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest miary Lebesgue'a zero, to $f[A]$ też jest miary zero.

8. Załóżmy, że μ jest miarą na $(X, \mathcal{A})$, Y dowolnym niepustym zbiorem, a $f : X \to Y$ surjekcją. Definiujemy

$$\Sigma = \{B \subset Y : \ f^{-1}[B] \in \mathcal{A}\}, \qquad \nu(B) = \mu(f^{-1}[B]), \quad B \in \Sigma.$$

Pokazać, że Σ jest σ-cialem podzbiorów Y, a $\nu : \Sigma \to [0, +\infty]$ jest miarą na (Y, Σ).

9. Wykazać, że jeśli μ jest miarą skończoną i $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zstępującym ciągiem zbiorów mierzalnych, to

$$\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Podać przykład zstępującego ciągu zbiorów $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dla który zachodzi jedynie nierówność $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) < \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$

10. Dana jest rodzina zbiorów $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taka, że:

$$\text{(a)}\ \ I_n \in \mathcal{L}, \quad \text{(b)}\ \ I_{n+1} \subset I_n, \quad \text{(c)}\ \ \lambda(I_1) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{(d)}\ \ \lambda(I_{n+1}) = \frac{3}{5}\lambda(I_n).$$

Policzyć miarę Lebesgue'a zbioru $I_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

11. Niech A będzie zbiorem tych punktów z odcinka $[0,1]$, które posiadają rozwinięcia w ułamek dwójkowy mające 0 na wszystkich parzystych miejscach po przecinku. Obliczyć miarę Lebesgue'a zbioru A.

12. Niech $A_n = (n, n + \frac{1}{5^n}) \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Obliczyć miarę Lebesgue'a zbioru $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} A_n$. Dla ustalonego $N \in \mathbb{N}_1$ definiujemy funkcję $f_N(x) = \sum_{k+0}^{N} 3^k 1_{A_k}(x)$. Wykazać, że dla każdego $N \in \mathbb{N}_1$ zachodzi $\int_A f_N d\lambda \leq \frac{5}{2}$.

13. Czy istnieje:
   - rodzina podzbiorów zbioru $\{1, 3, 5\}$, która nie jest σ–ciałem?
   - funkcja ciągła $f : (\mathbb{R}^2, d_E) \to (\mathbb{R}, d_E)$, która nie jest borelowska?
   - zbiór mierzalny względem miary Lebesgue'a, który nie jest borelowski?
   - podzbiór $\mathbb{R}$ miary Lebesgue'a 5, którego wnętrze ma miarę 4, a domknięcie – miarę 3?
   - podzbiór $\mathbb{R}$ miary Lebesgue'a 2, który jest brzegowy?
   - funkcja prosta-nieujemna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $f \geq 2$ i $\int_{[-2,2]} f d\lambda < 7$?