Lista powtórkowa 1

WRAiT 1, semestr zimowy 2017/2018

We wszystkich zadaniach zakładamy, że (X, d) jest przestrzenią metryczną.

1. Na zbiorze $\mathbb{R}$ zadajemy odwzorowanie:
$$\rho(x, y) = 1 + \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$
   (a) Sprawdzić, że $(\mathbb{R}, \rho)$ jest przestrzenią metryczną.
   (b) Zbadać jej zwartość, zupełność i ośrodkowość.
   (c) Podać przykład zbioru nieograniczonego w tej przestrzeni (lub uzasadnić, że nie istnieje).

2. Pokazać, że jeśli A jest ograniczony, to $\operatorname{diam} \mathrm{Cl}(A) = \operatorname{diam} A$. Czy $\operatorname{diam} \mathrm{Int}(A) = \operatorname{diam} A$ dla dowolnego zbioru A? Czy obrazem zbioru ograniczonego przez funkcję ciągłą jest zbiór ograniczony?

3. Czy jest możliwe, aby w przestrzeni metrycznej kula o większym promieniu była zawarta w kuli o mniejszym promieniu? Dokładniej, czy istnieje (X, d), $x_1, x_2 \in X$ i $r_1 < r_2$ takie, że $K(x_2, r_2) \subset K(x_1, r_1)$?

4. Niech $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ będą ciągami Cauchy'ego w przestrzeni (X, d). Sprawdzić, czy $a_n := d(x_n, y_n)$ jest zbieżny w $(\mathbb{R}, d_E)$.

5. Znaleźć wnętrze, domknięcie i brzeg następujących zbiorów (w metryce euklidesowej):
   (a) $A = \{-1, 1\} \times \mathbb{Q}$, (b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(0, 0)\}$,
   (c) $C = \{3^n, \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}_1\}$, (d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\} \cup \{(0, 0)\}$

6. Zbadać zwartość, spójność i zupełność zbiorów z zadania poprzedniego.

7. Rozpartujemy przestrzeń metryczną $X = [0, 1] \times (0, 1)$ z metryką euklidesową. Znaleźć wnętrza, domknięcia i brzeg następujących zbiorów:
   (a) $A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\} \times (0, 1)$, (b) $B = (\frac{1}{2}, 1) \times (0, 1)$, (c) $C = \{(x, x) : x \in (0, 1)\}$.

8. Czy istnieją niepuste zbiory A i B takie, że $A \subset B$, A jest brzegowy i B nie jest brzegowy?

9. Sprawdzić, że
   (a) $\mathrm{Bd}(\mathrm{Int}(A)) \subset \mathrm{Bd}(A)$,
   (b) $\mathrm{Bd}(\mathrm{Bd}(\mathrm{Bd}(A))) = \mathrm{Bd}(\mathrm{Bd}(A))$,
   (c) zbiór A jest nigdziegęsty wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Cl}(X \setminus \mathrm{Cl}(A)) = X$,
   (d) obrazem zbioru gęstego przez homeomorfizm musi być zbiór gęsty.

10. Niech $f, g : (X, d) \to \mathbb{R}, d$ są ciągłe. Czy $f + g$ też jest ciągła?

11. Czy poniższe funkcje są ciągłe? Czy są homeomorfizmami?
   (a) $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{x}{|x|+1} \in \mathbb{R}$, (b) $f : (\mathbb{R}^2, d_e) \to x_1^2 + x_2^2 \in (\mathbb{R}, d_e)$, (c) $\mathrm{id} : (\mathbb{R}^2, d_R) \to (\mathbb{R}^2, d_C)$.