Lista 9: σ-ciała zbiorów mierzalnych

WRAiT 1, semestr zimowy 2017/2018

1. Przypomnijmy, że

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x\colon \exists_{i\in I}\ x\in A_i\} \quad \text{oraz} \quad \bigcap_{i\in I} A_i = \{x\colon \forall_{i\in I}\ x\in A_i\}.$$

   Obliczyć:

   (a) $\bigcap_{t\in\mathbb{R}}\{x\in\mathbb{R}\colon x>t\}$,
   (b) $\bigcup_{t\in[0,10]}\{x\in\mathbb{R}\colon x<t\}$,
   (c) $\bigcap_{t\in\mathbb{R}}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2<t\}$,
   (d) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\{x\in\mathbb{R}\colon n\le x<m\}$,

2. Niech $(A_n)_n$ będzie ciągiem podzbiorów $\mathbb{R}$. Wykazać, że

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k>n} A_k \;=\; \{x\in\mathbb{R}\colon x\in A_n \text{ dla nieskończenie wielu } n\},$$
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_k \;=\; \{x\in\mathbb{R}\colon \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\ge n_0}\ x\in A_n\}.$$

   Znaleźć przykład takiego ciągu $(A_n)_n$, że zbiory te nie są równe.

3. Niech $\mathcal{R}$ będzie σ-ciałem. Wykazać, że wówczas:

   (a) $X\in\mathcal{R}$;
   (b) $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{R} \;\Rightarrow\; \cup_{j=1}^{n}A_j\in\mathcal{R}$;
   (c) $A_1,A_2,\dots\in\mathcal{R} \;\Rightarrow\; \cap_{j=1}^{\infty}A_j\in\mathcal{R}$;
   (d) $A,B\in\mathcal{R} \;\Rightarrow\; A\setminus B\in\mathcal{R}$.

4. Wykazać, że przekrój dowolnej rodziny σ-ciał jest σ-ciałem.

5. Sprawdzić, czy następujące rodziny są σ-ciałami:

   (a) $X=\{a,b,c,d\}$, $\mathcal{R}=\{\emptyset,X,\{a\},\{c,d\},\{b,c,d\}\}$.
   (b) $X=\mathbb{R}$, $A\in\mathcal{R}\Leftrightarrow A$ jest otwarty lub $X\setminus A$ jest otwarty.
   (c) $X=\mathbb{R}$, $A\in\mathcal{R}\Leftrightarrow A$ jest przeliczalny lub $X\setminus A$ jest przeliczalny.

6. Niech $A,B\subset X$ będą niepuste. Jak wygląda σ-ciało podzbiorów X generowane przez A i B, jeśli $A\cap B=\emptyset$? Co się zmieni, jeśli założymy, że $A\cap B\neq\emptyset$?

7. Niech $X=[-3,3]$. Znaleźć σ-ciała podzbiorów X generowane przez zbiory:
   (a) $(0,1)$, (b) $(-1,0)\cup(1,3)$, (c) $\{-3,3\}$, (d) $\{-3\},\{3\}$.

8. Niech $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ będzie σ-ciałem i niech $B \subset X$ będzie niepustym zbiorem $\mathcal{R}$-mierzalnym. Definujemy

$$(a)\ \ \mathcal{R}_B = \{A \cap B : A \in \mathcal{R}\}, \quad (b)\ \ \mathcal{R}^B = \{A \in \mathcal{R} : A \subset B\}$$

Wykazać, że zarówno $\mathcal{R}_B$, jak i $\mathcal{R}^B$ są σ-ciałem podzbiorów B. Czy któraś z tych rodzin jest także σ-ciałem podzbiorów X?

9. Uzasadnić, że σ-ciało generowane przez rodziny półprostych postaci $[a, +\infty)$, $a \in \mathbb{Q}$, jest równe σ-ciału zbiorów borelowskich.