Lista 8: Przestrzeń $(C[0,1], d_{\sup})$ i zbiór Cantora

WRAiT 1, semestr zimowy 2017/2018

1. Zbadać zbieżność punktową i jednostają poniższych ciągow funkcyjnych na $X = [0,1]$:

   (a) $f_n(x) = x^n$; (b) $f_n(x) = \cos\frac{x^3}{n}$; (c) $f_n(x) = e^{\frac{x}{n}}$; (d) $f_n(x) = nx^n(1-x)^n$;
   (e) $f_n(x) = \dfrac{n}{n+x^2}$; (f) $f_n(x) = \dfrac{n}{n+n^2x^2}$; (g) $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}$;

2. Obliczyć trzy pierwsze przybliżenia funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ wielomianami Bernsteina $(p_n)_n$ na $C[0,1]$ i obliczyć odległość $d(p_k, f)$ dla $k = 0,1,2,3$ (można wesprzeć się komputerem). Znaleźć wielomiany (q_n) o współczynnikach wymiernych takie, że $d(p_k, q_k) < \frac{1}{k}$ dla $k = 1,2,3$.

3. Jak wyglądają kule w przestrzeni $(C[-1,1], d_{\sup})$?

4. Zbadać otwartość i domkniętość następujących zbiorów w $(C[-1,1], d_{\sup})$:

   (a) $A = \{f \in C[-1,1] : f \text{ ma jedno miejsce zerowe}\}$
   (b) $A = \{f \in C[-1,1] : f(-1) < f(1)\}$
   (c) $A = \{f \in C[-1,1] : f \text{ jest nieparzysta}\}$
   (d) $A = \{f \in C[-1,1] : f \text{ spełnia warunek Lipschitza}\}$

5. Niech $c, d \in \mathcal{C}$, $c = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{3^k}$, $d = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{3^k}$, $c_k, d_k \in \{0,2\}$. Wykazać, że

$$|c-d| < \frac{1}{3^n} \quad \text{wtedy i tylko wtedy} \quad c_k = d_k \text{ dla } k \leq n.$$

6. Pokazać, że zbiór Cantora jest całkowicie niespójny, to znaczy jedynymi spójnymi podzbiorami zbioru Cantora są zbiory jednoelementowe lub zbiór pusty.

7. Pokazać, że odwzorowanie $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, dane wzorem

$$f\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{3^k}\right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{2k-1}}{3^k}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{2k}}{3^k}\right)$$

   jest homeomorfizmem.

8. Czy istnieją funkcje ciągłe (homeomorfizmy) pomiędzy następującymi przestrzeniami (z metryką euklidesową odpowieniego wymiaru)

   (a) $\mathcal{C}$ oraz $[0,1]^3$; (b) $\mathcal{C}$ oraz $\mathbb{R}^2$; (c) $\mathcal{C}$ oraz $\mathcal{C} \times [0,1]$; (d) $\mathcal{C}$ oraz S^1?