Lista 7: Jednostajna ciągłość i warunek Lipschitza

WRAiT 1, semestr zimowy 2017/2018

1. Sprawdzić, czy poniższe funkcje są jednostajnie ciągłe, czy spełniają warunek Lipshitza i czy są kontrakcjami. O ile nie zaznaczono inaczej, przestrzeń $\mathbb{R}^n$ i jej podzbiory rozpatrujemy z metryką euklidesową.
   (a) $f : (1, \infty) \ni x \mapsto \ln x \in \mathbb{R}$,
   (b) $f : \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2 \in \mathbb{R}$
   (c) $f : [-\pi, \pi]^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto \sin(x_1 \cdot x_2) \in \mathbb{R}$
   (d) $f : (\mathbb{R}^2, d_E) \ni (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1) \in (\mathbb{R}^2, d_T)$,
   (e) $f : (C[0,1], d_{\sup}) \ni f \to 1 + \int_0^1 t^2 f(t)dt \in (\mathbb{R}, d_E)$.
2. Dana jest funkcja ciągła $f : ([a, b), d_E) \to (\mathbb{R}, d_E)$, $a < b$. Wykazać, że f jest jednostajnie ciągła na $[a, b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona granica $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$.
3. Czy jeśli $f : A \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła na zbiorze $A \subset \mathbb{R}$, to $f \cdot f$ też?
4. Podać przykład lub uzasadnić, że nie istnieje funkcja $f : (\mathbb{R}, d_D) \to (\mathbb{R}, d_D)$, która jest jednostajnie ciągła, ale nie spełnia warunku Lipschitza.
5. Wykazać, że obrazem zbioru ograniczonego przez funkcję lipschitzowską jest zbiór ograniczony.
6. Udowodnić, że jeśli f jest różniczkowalna na przedziale (a, b) i istnieje $c > 0$ takie, że $|f'(x)| < c < 1$ dla każdego $x \in (a, b)$, to f jest kontrakcją.
7. Wykazać, że następujące odwzorowania są kontrakcjami i sprawdzić, czy mają punkt stały:
   (a) $f : ((0, 1), d_E) \ni x \mapsto \frac{1}{4}x(1 - x) \in (\mathbb{R}, d_E)$;
   (b) $f : ([0, +\infty), d_E) \ni x \mapsto \sqrt{x + 2} \in (\mathbb{R}, d_E)$;
   (c) $f : (\mathbb{R}^2, d_T) \ni (x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{3}x_2 \in (\mathbb{R}, d_E)$,
   (d) $T : (C[0,1], d_{\sup}) \ni f \mapsto Tf \in (C[0,1], d_{\sup})$, $Tf(x) = \frac{1}{7}f(1 - x) - 2x + 1$;
8. Przy pomocy twierdzenia Banach o punkcie stałym wykazać zbieżność ciągu
$$\sqrt{5}, \sqrt{5 + \sqrt{5}}, \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5}}}, \ldots,$$
   i znaleźć jego granicę.
9. Przy pomocy twierdzenia Banacha o punkcie stałym udowodnić, że równanie
$$x^7 - 8(1 - x) = 0$$
   ma dokładnie jeden pierwiastek w przedziale $(0, 1)$. Dlaczego nie wystarczy skorzystać z własności Darboux?