Lista 6: Funkcje ciągłe

WRAiT 1, semestr zimowy 2017/2018

1. Wykazać, że zachodzą następujące własności przeciwobrazu: dla $A, B \subset X$, $f : X \to Y$,

   (a) $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$, (b) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.

2. Pokazać, że $f : X \to Y$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobraz dowolnego zbioru domkniętego jest domknięty.

3. Wykazać, że jeśli $f : (X, d) \to (Y, d)$ jest ciągła, to

   (a) $f(\mathrm{Cl}(A)) \subset \mathrm{Cl}(f(A))$ dla dowolnego $A \subset X$;

   (b) $\mathrm{Cl}(f^{-1}[B]) \subset f^{-1}[\mathrm{Cl}(B)]$ dla dowolnego $B \subset Y$;

   Czy jeśli f jest homeomorfizmem, to zachodzą równości obu zbiorów?

4. Które z poniższych funkcji są ciągłe? czy są homeomorfizmami?

   (a) $f : (\mathbb{R}^2, d_E) \ni (x_1, x_2) \mapsto x_2 \in (\mathbb{R}, d_E)$,

   (b) $f : (\mathbb{R}^2, d_E) \ni (x_1, x_2) \mapsto x_2 \in (\mathbb{R}, d_D)$,

   (c) $f : (\mathbb{R}^2, d_T) \ni (x_1, x_2) \mapsto (e^{2x_1 - x_2}, x_1 + x_2) \in ((0, \infty) \times \mathbb{R}, d_E)$,

   (d) $f : (\mathbb{R}^2, d_E) \ni (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1) \in (\mathbb{R}^2, d_R)$,

   (e) $f : (C[0, 1], d_{\sup}) \ni f \to f(\frac{1}{2}) \in (\mathbb{R}, d_E)$.

5. Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją ciągłą. Czy zawsze:

   (a) obraz zbioru otwartego jest otwarty?

   (b) przeciwobraz kuli (otwartej) jest kulą (otwartą)?

   (c) przeciwobraz kuli domkniętej jest zbiorem domkniętym?

   (d) przeciwobraz zbioru gęstego jest gęsty?

   (e) obraz zbioru zwartego jest domknięty?

   (f) obraz zbioru niespójnego jest niespójny?

6. Czy obraz zbioru brzegowego przez funkcję ciągłą musi być brzegowy?

7. Czy w poniższych przypadkach istnieje ciągła surjekcja z przestrzeni X na przestrzeń Y?

   (a) $X = ([0, 1], d_E)$, $Y = ((0, 1), d_E)$;

   (b) $X = ([0, 1] \cup [3, 4], d_E)$, $Y = ([-3, 3], d_E)$;

   (c) $X = ([0, 1], d_E)$, $Y = ([0, 1], d_R)$;

   (d) $X = ([0, 1], d_T)$, $Y = ([0, 1], d_D)$;

   (e) $X = (\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}, d_E)$, $Y = ((0, 1), d_E)$;

(f) $X = ((0,1], d_E)$, $Y = (\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}, d_E)$;

8. Wykazać, że relacja homeomorficzności jest przechodnia, tzn. jeśli (X, d_X) jest homeomorficzne z (Y, d_Y), a (Y, d_Y) jest homeomorficzne z (Z, d_Z), to (X, d_X) jest homeomorficzne z (Z, d_Z).

9. Podać przykład ciągłej bijekcji, która nie jest odwzorowaniem otwartym.

10. Wykazać, że następujące pary przestrzeni (z metryką euklidesową) są homeomorficzne:

    (a) $X = [-1,1]$, $Y = [0,2017]$;

    (b) $X = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $Y = \mathbb{R}$;

    (c) $X = (1,0)$, $Y = (1, +\infty)$;

11. Wykazać, że pierścień $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ i cylinder $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ (z metryką euklidesową) są homeomorficzne.

    Wskazówka: Zbadać własności funkcji

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2+y^2} - 1 \right).$$

12. Czy funkcja $f : X \to Y$, gdzie $X = [0,1) \cup \{2\}$, $Y = [0,1]$ (z metryką euklidesową) określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{gdy } x \in [0,1) \\ 1 & \text{gdy } x = 2, \end{cases}$$

    jest homeomorfizmem?