

---

## Lista 5: Zupełność, zwartość, spójność

WRAiT 1, semestr zimowy 2017/2018

---

We wszystkich zadaniach zakładamy, że  $(X, d)$  jest przestrzenią metryczną.

1. Czy przestrzeń  $\mathbb{Q}$  z metryką euklidesową jest zupełna?
2. Czy przestrzeń metryczna  $(\mathbb{R}, d_\pi)$ , gdzie

$$d_\pi(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ |x - \pi| + |y - \pi|, & x \neq y \end{cases}$$

jest zupełna?

3. Czy przestrzeń metryczna  $(\mathbb{R}, \rho)$ , gdzie

$$\rho(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & x, y \in \mathbb{Q} \text{ lub } x, y \notin \mathbb{Q}, \\ |x| + |y|, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

jest zupełna?

4. Jak wyglądają kule i zbiory otwarte w  $\mathbb{N}$  z metryką euklidesową? Czy jest to przestrzeń zupełna?

5. Sprawdzić zwartość i zupełność zbiorów:

- (a)  $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$  w  $(\mathbb{R}, d_E)$ ;
- (b)  $B = \{(x, \arctan x) : x \in \mathbb{R}\}$  w  $(\mathbb{R}^2, d_E)$ ;
- (c)  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \setminus \{(4, 0)\}$  w  $(\mathbb{R}^2, d_R)$ ;
- (d)  $D = \overline{K}_M((1, 0), 2)$  w  $(\mathbb{R}^2, d_M)$ ;
- (e)  $E = \overline{K}_C((2, 0), 2)$  w  $(\mathbb{R}^2, d_C)$ .

6. Czy  $K(0, 1)$  w  $(C[0, 1], d_1)$  jest zbiorem zwartym?
7. Wykazać, że jeśli ciąg w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  spełnia warunek  $d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n}$ , to spełnia warunek Cauchy'ego. Czy istnieje ciąg w  $\mathbb{R}$  taki, że  $|x_n - x_{n+1}| \rightarrow 0$ , ale nie jest zbieżny (a tym bardziej nie jest Cauchy'ego)?
8. Podać przykład zbioru w  $\mathbb{R}^2$ , który jest zwarty w metryce taksówkowej, ale nie jest zwarty w metryce centrum.
9. Opisać wszystkie zbiory zwarte na  $\mathbb{R}$  z metryką dyskretną. Czy dowolna kula domknięta w  $(\mathbb{R}, d_D)$  będzie zbiorem zwartym? Czy istnieje w  $(\mathbb{R}, d_D)$  zbiór domknięty i ograniczony, który nie jest zwarty?
10. Podać przykład przestrzeni metrycznej, które jest zupełna i ośrodkowa, ale nie jest zwarta.
11. Podać przykłady na to, że:
  - (a) wnętrze zbioru spójnego nie musi być zbiorem spójnym,
  - (b) przekrój zstępującego ciągu zbiorów spójnych nie musi być spójny.