Lista 4: Wnętrza i domknięcia, gęstość

WRAiT 1, semestr zimowy 2017/2018

We wszystkich zadaniach zakładamy, że (X, d) jest przestrzenią metryczną.

1. Znaleźć wnętrze, domknięcie i brzeg następujących zbiorów (w metryce euklidesowej): (a) $(3,7]\cup[10,2017)$, (b) $\{n+\frac{1}{k}, n, k \in \mathbb{N}_1\}$, (c) $[0,1)\times\{0\}$, (d) $\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$, (e) $\{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$.
2. Znaleźć wnętrze, domknięcie i brzeg zbioru $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$ w metryce rzeka i w metryce centrum.
3. Wykazać, że $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A)))) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$.
4. Znaleźć przykład zbioru $A \subset \mathbb{R}$, dla którego zbiory: A, $\mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Cl}(A)$, $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$, $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$, $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)))$ i $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A)))$ są parami różne.
5. Czy w przestrzeni metrycznej zachodzą własności:
   (a) domknięcie różnicy (mnogościowej) jest różnicą domknięć, tj. $\mathrm{Cl}(A \setminus B) = \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Cl}(B)$?
   (b) brzeg sumy zbiorów jest sumą brzegów, tj. $\mathrm{Bd}(A \cup B) = \mathrm{Bd}(A) \cup \mathrm{Bd}(B)$?
   (c) suma dwóch zbiorów brzegowych jest zbiorem brzegowym?
6. Czy (w wybranej przestrzeni metrycznej) istnieje niepusty zbiór:
   (a) otwarty i brzegowy?
   (b) domknięty i brzegowy?
   (c) otwarty i gęsty?
   (d) gęsty, którego dopełnienie jest brzegowe?
   (e) brzegowy, który nie jest brzegiem żadnego zbioru?
7. Niech $A \subset B$. Czy z faktu, że A jest nigdziegęsty wynika, że B jest nigdziegęsty? A odwrotnie?
8. Zdefiniować 3 rozłączne podzbiory gęste w $\mathbb{R}$. Cztery... Pięć... Nieskończenie wiele...
9. Czy przestrzeń metryczna $(\mathbb{R}, d_\pi)$, gdzie
$$d_\pi(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ |x-\pi| + |y-\pi|, & x \neq y \end{cases},$$
   jest ośrodkowa?
10. Uzasadnić, że w przestrzeni metrycznej ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest ograniczony.
11. Uzasadnić, że w przestrzeni metrycznej jeśli ciąg spełnia warunek Cauchy'ego i ma podciąg zbieżny, to jest zbieżny (do tej samej granicy co podciąg).