Lista 3: Zbieżność, zbiory otwarte i domknięte

WRAiT 1, semestr zimowy 2017/2018

We wszystkich zadaniach zakładamy, że (X,d) jest przestrzenią metryczną.

1. Załóżmy, że metryki d_1 i d_2 na przestrzeni X są równoważne. Pokazać, że ciąg $(x_n)_n \subset X$ jest zbieżny w d_1 wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny w d_2. Czy d_R i d_E są równoważne?

2. Zbadaj zbieżność poniższych ciągów w podanych przestrzeniach metrycznych:

   (a) $x_n = (e^{-n}, (1+\frac{1}{3n})^n, n - \sqrt{n^2-n})$, $(\mathbb{R}^3, d_E)$;
   (b) $x_n = (\frac{\sin n}{n}, \ln \frac{1}{n})$, $(\mathbb{R}^2, d_T)$;
   (c) $x_n = (-3+\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $(\mathbb{R}^2, d_R)$;
   (d) $x_n = \cos n$, $(\mathbb{R}, d_D)$.

3. Czy prawdą jest, że ciąg punktów $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$, $n \in \mathbb{N}$, w R^2 z metryką rzeka jest zbieżny do (x_1, x_2) wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1^{(n)} \to x_1$ i $x_2^{(n)} \to x_2$?

4. Oznaczamy $\mathbb{N} = \{1,2,3\ldots\}$. Które z poniższych zbiorów są otwarte, a które domknięte w $\mathbb{R}$ z metryka euklidesową:
   (a) $\{n \in \mathbb{N} : n < \pi\}$, (b) $2\mathbb{Z}$, (c) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, (d) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, (e) $\{\frac{3}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, (f) $[3,+\infty)$.

5. Zbadać, czy poniższe zbiory są otwarte lub domknięte w metrykach: euklidesowej, maksimum, rzeka i centrum na $\mathbb{R}^2$:
   (a) $[1,2]\times(1,2)$; (b) $\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$; (c) $\{(x,-x); x \in (3,4)\}$; (d) $\{(x,y) : 1 \leq x^2+y^2 < 7\}$.

6. Podać przykład na to, że suma nieskończonej rodziny zbiorów domkniętych nie musi być zbiorem domkniętym (a) w $\mathbb{R}$, (b) w $\mathbb{R}^2$ (z wybraną metryką). Czy istnieje taki przykład w $\mathbb{R}$ z metryką dyskretną?

7. Czy istnieje zbiór $A \subset \mathbb{R}^2$, który jest otwarty w metryce euklidesowej, ale nie jest otwarty w metryce centrum? A odwrotnie: otwarty w d_C, ale nie otwarty w d_E? Czy zatem metryki d_E i d_C są równoważne?

8. Czy istnieje:

   (a) zbiór $A \subset (\mathbb{R}, d_E)$, taki że $\mathrm{Int}(A) = \mathbb{Q}$?
   (b) zbiór $A \subset (\mathbb{R}, d_E)$, taki że $\mathrm{Bd}(A) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$?
   (c) zbiór $A \subset (\mathbb{R}^2, d_R)$, taki że $\mathrm{Cl}(A) = [0,1]\times[1,2]$?
   (d) zbiór $A \subset (\mathbb{R}, d_E)$, taki że $\mathrm{Int}(\mathrm{Bd}(A)) \neq \emptyset$?
   (e) zbiór $A \subset (\mathbb{R}, d_D)$, taki że $\mathrm{Bd}(A) = \{1\}$?

9. Czy w dowolnej metryce domknięcie kuli otwartej jest kulą domkniętą, tzn. $\overline{K}(a,r) = \mathrm{Cl}(K(a,r))$? Jeśli nie, to czy zachodzi jakieś zawieranie?

10. Wykazać, że $\mathrm{Cl}(A\cup B) = \mathrm{Cl}(A)\cup\mathrm{Cl}(B)$ oraz $\mathrm{Cl}(A\cap B) \subset \mathrm{Cl}(A)\cap\mathrm{Cl}(B)$. Podać przykład, że nie zachodzi zawieranie w drugą stronę.