Lista 2: Zbiory ograniczone, kule w przestrzeniach metrycznych

WRAiT 1, semestr zimowy 2017/2018

We wszystkich zadaniach zakładamy, że (X, d) jest przestrzenią metryczną.

1. Obliczyć średnicę zbioru A w podanej metryce:
   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| + |y| \leq 4\}$, $X = \mathbb{R}^2$, $d = d_{\text{sup}}$;
   (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$, $X = \mathbb{R}^2$, $d = d_{\text{rzeka}}$;
   (c) $A = \{g(x) = a\,x^2; a \in [-1, 5]\}$, $X = C[0, 1]$, $d = d_{\text{sup}}$.
2. Wykazać, że dla dowolnego $x \in X$ i $r \geq 0$ zachodzi nierówność
   $$\text{diam } K(x, r) \leq 2r.$$
   Znaleźć przykład przestrzeni metrycznej, w której równość nie musi zachodzić.
3. Niech $A, B \subset X$ będą niepustymi podzbiorami. Sprawdzić, że
   (a) $A \subset B \;\Rightarrow\; \text{diam } A \leq \text{diam } B$;
   (b) $A \cap B \neq \emptyset \;\Rightarrow\; \text{diam }(A \cup B) \leq \text{diam } A + \text{diam } B$.
4. Wykazać, że zbiór $A \subset X$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera się w jakiejś kuli (o skończonym promieniu), tzn. istnieją punkt $x \in X$ oraz promień $r > 0$ takie, że $A \subset K(x, r)$.
5. Wykazać, że suma dwóch zbiorów ograniczonych jest ograniczona.
6. Narysować $K((0, 0), 1)$ i $K((2, 1), 4)$ na płaszczyźnie z metryką euklidesową, taksówkową, maksimum, dyskretną, rzeka i centrum.
7. Jakie kształy mogą mieć kule w metrykach rzeka i centrum? Od czego one zależą?
8. Narysować kulę o środku $o = (0, 0)$ i promieniu 1 w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_*)$, gdzie $d_* = d_T + d_M$.
   Wskazówka: Skorzystać z symetrii kuli wzgl. środka układu.
9. Podać przykład zbioru nieograniczonego w podanej przestrzeni lub uzasadnić, że nie istnieje: (a) $(\mathbb{R}^2, d_T)$, (b) $(\mathbb{R}^2, d_C)$, (c) $(\mathbb{R}^2, d_D)$.