Lista 1: Przestrzenie metryczne

WRAiT 1, semestr zimowy 2017/2018

1. Sprawdzić, czy poniższe funkcje są metrykami na zbiorze X:

   (a) $d(x,y) = |\sqrt{x} - \sqrt{y}|,\ X = [0,+\infty)$; (b) $d(x,y) = |3^x - 3^y|,\ X = \mathbb{R}$;

   (c) $d(n,m) = \left|\dfrac{1}{2m} - \dfrac{1}{2n}\right|,\ X = \mathbb{N}$; (d) $d(f,g) = \int\limits_0^1 |f(x) - g(x)|dx,\ X = C[0,1]$;

   (e) $d(f,g) = |f'(1) - g'(1)| + \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|,\ X = C^1[0,1]$;

   (f) $d(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{3^n},\ X = [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \times \ldots$.
   (Uzasadnić, że odwzorowanie jest poprawnie określone)

2. Niech $X = \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X$. Przyjmujemy oznaczenia

$$d_T(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \quad \text{(metryka taksówkowa)},$$
$$d_E(x,y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} \quad \text{(metryka euklidesowa)},$$
$$d_M(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \quad \text{(metryka maksimum)}.$$

   (a) Wykazać, że d_T jest metryką na $\mathbb{R}^2$.

   (b) Wykazać, że dla dowolnych punktów $x, y \in \mathbb{R}^2$ zachodzą nierówności

$$d_M(x,y) \le d_E(x,y) \le d_T(x,y) \le 2d_M(x,y).$$

   (c) Wywnioskować stąd, że d_T, d_E, d_M są parami równoważne.

3. Zapisać wzór na liczenie odległości w metryce rzeka d_R i sprawdzić, że faktycznie jest to metryka.

4. Obliczyć odległość $d(f,g)$ w metryce supremum na przestrzeni funkcji ciągłych $C[0,1]$, gdy:

   (a) $f(x) = x + 2,\ g(x) = x^2 - 1$; (b) $f(x) = 1,\ g(x) = \frac{x}{x+1}$; (c) $f(x) = x^2,\ g(x) = [3x]$.

5. Wiadomo, że d_1 i d_2 są metrykami na X. Czy stąd wynika, że:

   (a) $d = d_1 - 2d_2$, zdefiniowane jako $d(x,y) = d_1(x,y) - 2d_2(x,y)$, jest metryką na X?

   (b) $d = d_1 + d_2$, zdefiniowane jako $d(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y)$, jest metryką na X?

   (c) $d = d_1 \cdot d_2$, zdefiniowane jako $d(x,y) = d_1(x,y) \cdot d_2(x,y)$, jest metryką na X?

   (d) $d = \sqrt{d_1}$, zdefiniowane jako $d(x,y) = \sqrt{d_1(x,y)}$, jest metryką na X?

   (e) $d = \min\{1, d_1\}$, zdefiniowane jako $d(x,y) = \min(1, d_1(x,y))$, jest metryką na X?

6. Znaleźć przykłady par (X,d), gdzie $X \neq \emptyset$, $d : X \times X \to [0,+\infty)$, które spełniają dokładnie dwa warunki przestrzeni metrycznej:

   (a) dodatnią określoność i symetrię, ale nie warunek trójąta;

   (b) dodatnią określoność i warunek trójąta, ale nie symetrię;

   (c) symetrię i warunek trójąta, ale nie dodatnią określoność.