Lista 14: Twierdzenia całkowe

WRAiT 1, semestr zimowy 2017/2018

1. Obliczyć całkę $\int_{[0,1]} f \mathrm{d}\lambda$, jeśli $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ przyjmuje wartość n na przedziałach długości $\frac{1}{3^n}$ wyrzucanych przy konstrukcji zbioru Cantora, zaś w punktach zbioru Cantora przyjmuje wartość e^{13}.

2. Niech $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, ν = miara licząca na $\mathbb{N}$, $f_n(k) = \frac{1}{n}1_{\{1,2,\ldots,n\}}(k)$. Sprawdzić, czy zachodzi równość pomiędzy $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n \mathrm{d}\nu$ oraz $\int\limits_{\mathbb{N}} \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\nu$. Jeśli nie, wyjaśnić dlaczego.

3. Obliczyć granice przy $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_X f_n(x) d\lambda(x)$, gdy

   (a) $X = [0,1]$, $f_n(x) = \dfrac{n^2x+1}{n^2x+2n-1}$, (b) $X = [-10,10]$, $f_n(x) = \dfrac{nx+3}{nx+1}$,
   (c) $X = [1,4)$, $f_n(x) = \dfrac{n}{n^2x+5}$, (d) $X = [0,\infty)$, $f_n(x) = \dfrac{n}{n^2x+5}$.

4. (Twierdzenie Lebesgue'a w wersji dla szeregów) Niech $(f_n)_n$ będzie takim ciągiem funkcji mierzalnych nieujemnych. Udowodnić, że wówczas

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

5. Wykazać, że dla dowolnego $\alpha > 0$ zachodzi równość

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha}\ln(\frac{1}{x})}{1-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2}.$$

   (Wskazówka: Wykazać, że $\int_0^1 x^{n+\alpha}\ln\frac{1}{x} dx = \frac{1}{(n+\alpha+1)^2}$.)

6. Niech $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{N}$, λ oznacza 1-wymiarowa miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}$, ν – miarę liczącą na $\mathbb{N}$, δ_0 - miarę Diraca w 0 na $\mathbb{R}$. Obliczyć:

   (a) $\lambda \times \lambda(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y \in \mathbb{Q}\})$,
   (b) $\lambda \times \nu(\{(n,m) \in \mathbb{N}^2 : n \leq m\})$,
   (c) $\lambda \times \delta_0(\{(x,y) \in [0,1]^2 : x > y\})$,
   (d) $\lambda \times \delta_0(\{(x,y) \in [-3,3]^2 : x > y\})$.

7. Obliczyć całkę

$$\int_{[0,1]^2} f(x,y) d\lambda_2(x,y),$$

   gdy

$$f(x) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in A, \\ \frac{1}{(2-x)(y+1)}, & (x,y) \in B \setminus A, \\ 0, & (x,y) \in [0,1]^2 \setminus (A \cup B), \end{cases}$$

   i $A = \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$ oznacza zbiór Cantora) oraz $B = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$.