Lista 13: Całka Lebesgue'a

WRAiT 1, semestr zimowy 2017/2018

W poniższych zadaniach zakładamy, że $(X, \mathcal{A}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą, czyli $X \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ jest σ-ciałem, a μ dowolną ustaloną miarą na $(X, \mathcal{A})$. λ oznacza miarę Lebesgue'a, δ_x oznacza miarę Diraca (skupioną w punkcie x).

1. Niech f będzie funkcją μ-całkowalną, prostą, ale niekoniecznie nieujemną (!), czyli

$$f = \sum_{k=0}^{n} a_k 1_{B_k}(x), \qquad a_k \in \mathbb{R},\ X = \dot{\bigcup_k} B_k.$$

Wykazać, że wówczas nadal prawdziwy jest wzór

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{n} a_k \mu(B_k).$$

2. Sprawdzić, czy następujące własności zachodzą dla wszystkich funkcji całkowalnych, a jeśli nie, to czy zachodzą dla klasy funkcji nieujemnych :
   (a) $A \subset B \Rightarrow \int_A f \mathrm{d}\mu \leq \int_B f \mathrm{d}\mu$.
   (b) $f \leq g \Rightarrow \int_A f \mathrm{d}\mu \leq \int_A g \mathrm{d}\mu$.
   (c) $\mu(A) = 0 \Rightarrow \int_A f \mathrm{d}\mu = 0$.
   (d) $\int_A f \mathrm{d}\mu = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$.

3. Sprawdzić, czy:
   (a) suma funkcji μ-całkowalnych jest μ-całkowalna.
   (b) iloczyn funkcji μ-całkowalnych jest μ-całkowalny.
   (c) funkcja stała jest μ-całkowalna.
   (d) każda funkcja mierzalna względem miary skończonej jest μ-całkowalna.

4. Wykazać, że jeśli $f : X \to \bar{R}$ jest μ-całkowalna (całkowalna na X względem miary μ), to przyjmuje wartość $-\infty$ na zbiorze miary zero.

5. Pokazać, że jeśli $f \colon X \to \mathbb{R}$ jest μ-całkowalna, to $|f|$ też jest μ-całkowalna oraz

$$\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| \mathrm{d}\mu.$$

6. Niech $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n 1_{(n, n+\frac{1}{4^n}]} x$. Znaleźć ciąg funkcji prostych $(f_n)_n$ aproksymujących f w sposób rosnący, a następnie obliczyć z definicji całkę $\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\lambda$.

7. Bez przybliżania funkcjami prostymi, obliczyć całki Lebesgue'a $\int_A f d\lambda$, jeśli:

(a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $f(x) = e^{x^2-1}$;

(b) $A = [0, 1]$, $f(x) = x^2 - 2x + 1$;

(c) $A = \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} (1+x^2)^{-3}, & \text{jeśli } x \in \mathbb{Q}, \\ (1+x^2)^{-2}, & \text{jeśli } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$

(d) $A = [0, 1]$, $\mathcal{C}$ jest zbiorem Cantora,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{jeśli } x \in (0, \frac{1}{2}) \setminus \mathcal{C}, \\ 1 - x^2 & \text{jeśli } x \in (\frac{1}{2}, 1) \setminus \mathcal{C}, \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{jeśli } x \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

8. Obliczyć całkę $\int_{\mathbb{R}} x^3 \mathrm{d}\delta_1$.

9. Niech $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\nu(A) = \begin{cases} n, & \text{gdy } |A| = n \\ \infty, & \text{gdy } |A| = \infty \end{cases}$.

   (a) Obliczyć całkę $\int_{\mathbb{N}} x^3 \mathrm{d}\nu$. Wskazówka: oszacować funkcję $f(x) = x^3$ od dołu przez funkcję prostą, której całkę łatwo policzyć.

   (b) Dla ustalonego ciągu $p = (p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ liczb nieujemnych definiujemy funkcję $f_p(x_k) = p_k \geq 0$. Znaleźć ciąg funkcji prostych $(f_n)_n$ aproksymujących f w sposób rosnący, a następnie obliczyć $\int\limits_{\mathbb{N}} f_p \mathrm{d}\nu$. Kiedy f_p jest ν-całkowalna?