Lista 12: Miara Lebesgue'a i całki z funkcji prostych-nieujemnych

WRAiT 1, semestr zimowy 2017/2018

We wszystkich zadaniach λ_n oznacza n-wymiarową miarę Lebesgue'a, a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ – σ-ciało zbiorów mierzalnych względem λ_n. W zadaniach można korzystać z faktów: (a) n-wymiarowa miara Lebesgue'a jest uogólnieniem długości ($n = 1$), pola powierzchni ($n = 2$) i objętości ($n = 3$); (b) jeśli $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$, to $A \times B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$ i $\lambda_{n+m}(A \times B) = \lambda_n(A) \cdot \lambda_m(B)$.

1. Uzasadnić mierzalność poniższych zbiorów i obliczyć ich jednowymiarową miarę Lebesgue'a:

   (a) $A = \{2, 4, 5, 19, 41\}$, (b) $B = (0, 2017)$ (c) $C = (-\infty, 30]$, (d) $D = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [-1, 1]$.

2. Uzasadnić mierzalność poniższych zbiorów i obliczyć ich dwuwymiarową miarę Lebesgue'a:

   (a) $A = \{(24, 12)\}$, (b) $B = \{(x, 3x + 1); x \in \mathbb{R}\}$ (c) $C = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, (d) $D = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}$, (e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, (f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < x\}$.

3. Podać przykład lub uzasadnić, że nie istnieje:

   (a) zbiór $A \subset \mathbb{R}$, który jest nieprzeliczalny i $\lambda(A) = 0$;

   (b) taki zbiór borelowski $A \subset \mathbb{R}$, że $\lambda(A) = 2$, $\lambda(\text{Int}(A)) = 1$, $\lambda(\text{Cl}(A)) = 2$;

   (c) zbiór otwarty V zawierający $A = [0, 1] \cup \{3\}$ i taki, że $\lambda(V \setminus A) < \varepsilon$,

   (d) zbiór domknięty F taki, że $F \subset A = \mathbb{Q}$ i $\lambda(F) > \lambda(A) - \varepsilon$ dla każdego $\varepsilon > 0$.

4. Czy dla każdego $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ zachodzi $\lambda(A) = \lambda(\text{Int}(A))$? A $\lambda(A) = \lambda(\text{Cl}(A))$?

5. Niech A będzie zbiorem tych liczb z przedziału $[0, 1]$, których rozwinięcie dziesiętne nie zawiera cyfry 7, czyli

   $$A = \{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}, a_n \in \{0, 1, \ldots, 6, 8, 9\}\}.$$

   Wykazać, że A jest mierzalny względem miary Lebesgue'a i obliczyć $\lambda(A)$.

6. Wykazać, że jeśli $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są ciągłe, to $F = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq g(x)\}$ jest mierzalny względem miary Lebesgue'a.

7. Uzasadnić, że zbiór $B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2} < \frac{3}{x}\}$ jest mierzalny względem miary Lebesgue'a i obliczyć $\lambda(B)$.

8. Wykazać, że dla $A, B \in \mathcal{L}$ i $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ funkcji prostej-nieujemnej mamy:

   (a) $\int_A 1_B \mathrm{d}\lambda = \int_B 1_A \mathrm{d}\lambda$

   (b) $\lambda(A) = 0 \Rightarrow \int_A f \mathrm{d}\lambda = 0$

   (c) $A \subset B \Rightarrow \int_A f \mathrm{d}\lambda \leq \int_B f \mathrm{d}\lambda$

9. Podać przykład lub uzasadnić, że nie istnieje:

   (a) funkcja charakterystyczna, które nie jest mierzalna względem miary Lebesgue'a;

   (b) funkcja prosta, która nie jest ograniczona;

   (c) funkcja prosta, która nie jest ciągła.

10. Funkcję

$$f(x) = \pi \cdot 1_{\mathbb{Q}}(x) - 5 \cdot 1_{\{\frac{1}{2}\}} + e \cdot 1_{\mathbb{R}\setminus\{\sqrt{2}\}}$$

przedstawić w postaci kombinacji liniowej indykatorów rozłącznych zbiorów wypełniających całą przestrzeń $\mathbb{R}$. Uzasadnić jej mierzalność i nieujemność. Obliczyć całki

$$\int_{[-1,1]} f \mathrm{d}\lambda, \quad \int_{(17,20)} f \mathrm{d}\lambda, \quad \int_{\mathbb{Q}} f \mathrm{d}\lambda.$$

11. Obliczyć całkę z funkcji prostej-nieujemnej na zbiorze E względem miary Lebesgue'a, gdy:

   (a) $E = [0, 10],\ f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 7) \\ \pi, & x \in \{7, 10\} \\ 2, & x \in (7, 10) \end{cases}$

   (b) $E = [-2, \infty),\ f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-2, 0) \\ 0, & x = 0 \\ e, & x \in (0, \infty) \end{cases}$

   (c) $E = \mathbb{R}^2,\ f(x) = \begin{cases} 7, & x^2 + y^2 \leq 9 \\ 0, & x^2 + y^2 > 9 \end{cases}$

   (d) $E = [-1, 1]^2,\ f(x) = \begin{cases} 4 & |x| + |y| \leq 1 \\ 0 & |x| + |y| > 1 \end{cases}.$

12. Obliczyć całkę z funkcji prostej-nieujemnej na zbiorze E względem miary Lebesgue'a, gdy:

   (a) $E = [0, \infty),\ f(x) = \sum\limits_{k=0}^{8} (k^2 + 1) \cdot 1_{[k,k+1)}(x);$

   (b) $A = [-4, 10],\ f(x) = \sum_{k=0}^{12} [x] \cdot 1_{(k-1,k)}(x);$

   (c) $E = [0, \ln 4],\ f(x) = [e^x];$

   (d) $E = [0, \infty),\ f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1_{[k,k+1)}(x)}{2^k},\ n \in \mathbb{N};$

   (e) $E = [1, n^2],\ f(x) = [\sqrt{x}]+1,\ n \in \mathbb{N};$

   (f) $E = [0, 1],\ f(x) = [n\, x],\ n \in \mathbb{N}.$