Lista 10: Funkcje mierzalne i miary

WRAiT 1, semestr zimowy 2017/2018

W zadaniach zakładamy, że $(X, \mathcal{A})$ jest przestrzenią mierzalną.

1. Wykazać, że jeśli $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ są mierzalne, to mierzalne są zbiory:
   (a) $\{x \in X \colon f(x) < \infty\}$;
   (b) $\{x \in X \colon f(x) \neq s\}$ dla dowolnego $s \in \mathbb{R}$;
   (c) $\{x \in X \colon f(x) \leq g(x)\}$;
   (d) $\{x \in X \colon f(x) > g(x)\}$;

2. Niech $f_n : X \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji $\mathcal{A}$-mierzalnych. Sprawdzić, że następujące zbiory należą do $\mathcal{A}$:
   (a) zbiór $x \in X$ takich, że $f_n(x) < 5$ dla wszystich n;
   (b) zbiór $x \in X$ takich, że $f_n(x) < 5$ dla prawie wszystich n;
   (c) zbiór $x \in X$ takich, że $f_n(x) < 5$ dla nieskończenie wielu n;
   (d) zbiór $x \in X$ takich, że $\sup_n f_n(x) \geq 0$;
   (e) zbiór $x \in X$ takich, że ciąg $(f_n(x))_n$ jest (słabo) rosnący;

3. Przez 1_A oznaczamy indykator (funkcję charakterystyczną) zbioru A. Sprawdzić, że zachodzą równości
$$1_{A\cup B}(x) = 1_A(x) + 1_B(x) - 1_{A\cap B}(x), \qquad 1_{A\cap B}(x) = 1_A(x)1_B(x).$$

4. Sprawdzić, że rodzina funkcji prostych jest zamknięta na kombinacje liniowe, mnożenie i branie modułu.

5. Pokazać, że jeśli $f : X \to \mathbb{R}$ jest $\mathcal{A}$-mierzalna i $A \in \mathcal{A}$, to funkcja
$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$
   jest także $\mathcal{A}$-mierzalna.

6. Niech $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Czy odwzorowanie dane wzorem
$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A \text{ przeliczalny}, \\ 1, & \text{w przeciwnym przypadku}, \end{cases}$$
   jest miarą na $(X, \mathcal{A})$?

7. Niech X będzie zbiorem skończonym. Sprawdzić, że wzór $\mu(A) = \frac{|A|}{|X|}$ określa miarę probabilistyczną na X.

8. Niech $(a_n)_n$ będzie pewnym ciągiem liczb rzeczywistych. Na przestrzeni $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ definiujemy funkcję
$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ \sum_{n \in A} a_n, & A \neq \emptyset. \end{cases}$$
Dla jakich $(a_n)_n$ μ jest miarą na $\mathbb{N}$? Kiedy powyższy wzór definiuje miarę liczącą?

9. Załóżmy, że X jest niepustym zbiorem oraz że mamy funkcję $f\colon X \to [0, \infty]$. Zdefiniujmy $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ wzorem
$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ \sum\limits_{x \in A} f(x), & \text{jeśli } A \text{ jest co najwyżej przeliczalny}, \\ \infty, & \text{jeśli } A \text{ jest nieprzeliczalny.} \end{cases}$$
Pokazać, że μ jest miarą.

10. Załóżmy, że $(X, \mathcal{A}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą. Zbadać, czy prawdziwe są następujące własności:
    (a) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$,
    (b) $\mu(A) \leq \mu(B) \Rightarrow A \subset B$,
    (c) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$,
    (d) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) = \mu(B) - \mu(B \setminus A)$.

11. (Lemat Borela-Cantelliego) Załóżmy, że $(X, \mathcal{A}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą, a ciąg zbiorów $A_n \in \mathcal{A}$ spełnia warunek $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. Wykazać, że
$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k\Big) = 0.$$