Rozwiązania Kolokwium 2
WRAiT 1, 16.01.2018r.

ZADANIE 1.

(a) **NIE**, niech L będzie stałą Lipschitza dla funkcji f. Mamy

$$|f \circ f(x) - f \circ f(y)| = |f(f(x)) - f(f(y))| \leqslant L|f(x) - f(y)| \leqslant L^2|x - y|.$$

(b) **TAK**, takim zbiorem jest np. zbiór liczb wymiernych. Jest on borelowski, bo jest przeliczalny. Ponadto nie jest ani otwarty, ani domknięty.
(c) **NIE**, funkcje $g \equiv 0$ i f są borelowskie, więc $f^+ = \max\{f, g\}$ też jest borelowska.
(d) **TAK**, takim zbiorem jest np. $A = (0,1) \cup (\mathbb{R} \setminus ((0,1) \cup \mathbb{Q}))$. Mamy $\operatorname{Int} A = (0,1)$, $\operatorname{Cl} A = \mathbb{R}$, ponadto $\lambda((0,1)) = 1$, $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$.
(e) **NIE**, niech f będzie funkcją prostą-nieujemną $f = \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbb{1}_{A_k}$ taką, że $0 \leqslant a_k \leqslant 7$. Mamy

$$\int_{[-2,2]} f\, d\lambda = \sum_{k=1}^{N} a_k \lambda([-2,2] \cap A_k) \leqslant 7 \sum_{k=1}^{N} \lambda([-2,2] \cap A_k).$$

Ponieważ zbiory $[-2,2] \cap A_k$ są parami rozłączne i zawarte w $[-2,2]$, to $\sum_{k=1}^{N} \lambda([-2,2] \cap A_k) \leqslant \lambda([-2,2]) = 4$. Czyli $\int f\, d\lambda \leqslant 7 \times 4 = 28$.

ZADANIE 2.

(a) Pokażemy, że funkcja f jest kontrakcją. Rozważmy dwa punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2). Z nierówności trójkąta mamy

$$\begin{aligned} |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| &= \left| \frac{x_1 + y_1}{2} - \frac{x_2 + y_2}{2} \right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) = \frac{1}{2}\mathrm{d}_T((x_1,y_1),(x_2,y_2)). \end{aligned}$$

To dowodzi, że f jest kontrakcją, czyli jest też lipschitzowska i jednostajnie ciągła. Ponieważ f odwzorowuje $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}_T)$ w $(\mathbb{R}, \mathrm{d}_E)$ (inne przestrzenie), to nie ma punktu stałego.

(b) Pokażemy, że funkcja jest lipschitzowska. W tym celu zauważamy, że jest ona różniczkowalna i $f'(x) = -2\sin(2x)$, czyli $|f'(\xi)| \leqslant 2$. Z twierdzenia o wartości średniej mamy

$$|f(x) - f(y)| = |x - y||f'(\xi)| \leqslant 2|x - y|,$$

gdzie ξ jest pewnym punktem pośrednim między x a y. Jest zatem Lipschitza ze stałą 2 oraz jednostajnie ciągła. Pokażemy, że f nie jest kontrakcją. Niech $x = \frac{\pi}{4}$ i $y = \frac{\pi}{8}$. Wtedy

$$|f(x) - f(y)| = \left| \cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{4} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\pi}{8} = |x - y|.$$

ZADANIE 3.

(a) **Zbieżność punktowa.** Ustalmy $x \in [0,1]$. Wtedy $\frac{x(x-1)}{n^3} \to 0$ gdy $n \to \infty$, czyli granica punktowa ciągu funkcji to funkcja $f \equiv 0$.

Zbieżność jednostajna Ciąg funkcji jest zbieżny jednostajnie do f, istotnie

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x(x-1)}{n^3}\right| \leqslant \frac{1}{n^3} \to 0$$

gdy $n \to \infty$.

(b) **Zbieżność punktowa.** Ustalmy $x \in [0,1]$. Jeśli $x = 0$ to $f_n(x) = -\frac{10}{7}$ dla każdego n. Jeśli $x \neq 0$, to $\frac{nx^3-10}{nx+7} \to x^2$ gdy $n \to \infty$. Zatem granica punktowa ciągu funkcji to

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{10}{7} \text{ gdy } x = 0 \\ x^2 \text{ jeśli } x \in (0,1]. \end{cases}$$

Zbieżność jednostajna. Gdyby ciąg funkcji f_n był zbieżny jednostajnie, to jego granica byłaby funkcją ciągłą. Ale f nie jest ciągła, więc ciąg funkcji f_n nie jest zbieżny jednostajnie.

ZADANIE 4. Funkcja zbioru z zadania nie jest miarą. Gdyby była miarą, to mielibyśmy $\mu(\{1,2\}) - \mu(\{1\}) - \mu(\{2\}) = 0$. Zbadajmy wartość tego wyrażenia dla μ. Mamy

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{\infty} 3^{-k} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2} - \sum_{k=3}^{\infty} 3^{-k} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3} - \sum_{k=3}^{\infty} 3^{-k} = -\sum_{k=3}^{\infty} 3^{-k} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} < 0,$$

czyli nie zachodzi $\mu(\{1,2\}) - \mu(\{1\}) - \mu(\{2\}) = 0$, stąd μ nie jest miarą.

ZADANIE 5.

(a) Zbiór B_n jest otwarty, więc jest mierzalny. Zbiór B jest przeliczalną sumą zbiorów mierzalnych, więc jest mierzalny. Zauważmy, że ponieważ $0 < \frac{1}{n} \leqslant 1$, to zbiory B_n są parami rozłączne, więc

$$\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

(b) Dla $x \in \left(n, n+\frac{1}{n}\right)$ mamy $[x]^2 = n^2$. Czyli

$$f(x) = \sum_{n=1}^{15} n^2 \mathbb{1}_{B_n}(x).$$

Zbiory B_n są parami rozłączne, zatem powyższe przedstawienie dowodzi, że f jest funkcją prostą-nieujemną. Mamy

$$\int_{[0,6]} f \, d\lambda = \sum_{n=1}^{15} n^2 \lambda([0,6] \cap (n, n+\frac{1}{n})).$$

Zauważmy, że $[0,6] \cap (n, n+\frac{1}{n}) = \emptyset$ dla $n \geqslant 6$, zatem w powyższej sumie wystarczy rozważać tylko pierwszych 5 składników. Ponadto dla $1 \leqslant n \leqslant 5$ mamy $\lambda([0,6] \cap (n, n+\frac{1}{n})) = \frac{1}{n}$. Stąd

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{15} n^2 \lambda([0,6] \cap (n, n+\frac{1}{n})) &= \frac{1}{1}1^2 + \frac{1}{2}2^2 + \frac{1}{3}3^2 + \frac{1}{4}4^2 + \frac{1}{5}5^2 \\ &= 1+2+3+4+5 = 15. \end{aligned}$$

Agnieszka Hejna