KOLOKWIUM 2

WRAiT 1, 16.01.2018

1. Czy poniższe obiekty istnieją? Odpowiedź krótko uzasadnić.
   (a) funkcja Lipschitzowska $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, której złożenie $f^2 = f \circ f$ nie jest Lipschitzowskie?
   (b) podzbiór $\mathbb{R}$ borelowski, który nie jest otwarty ani domknięty?
   (c) funkcja borelowska $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że jej część dodatnia $f^+ = \max\{f, 0\}$ nie jest borelowska?
   (d) podzbiór $\mathbb{R}$ mierzalny względem miary Lebesgue'a, którego wnętrze ma miarę 1, a domknięcie – miarę ∞?
   (e) funkcja prosta-nieujemna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $f \leq 7$ i $\int_{[-2,2]} f d\lambda = \infty$?
2. Sprawdzić, czy odwzorowania
   (a) $f : (\mathbb{R}^2, d_T) \ni (x, y) \to \frac{x+y}{2} \in (\mathbb{R}, d_E)$;
   (b) $f : (\mathbb{R}, d_E) \ni x \mapsto \cos(2x) - 7 \in (\mathbb{R}, d_E)$

   są jednostajnie ciagłe, spełniają warunek Lipschitza, są kontrakcjami? Jeśli odwzorowanie okaże się kontrakcją, zbadać istnienie punktu stałego. d_T oznacza metrykę taksówkową.
3. Zbadać zbieżność punktową i jednostają na zbiorze $X = [0, 1]$ ciągu funkcji $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdy
   (a) $f_n(x) = \frac{x(x-1)}{n^3}$;
   (b) $f_n(x) = \frac{nx^3-10}{nx+7}$.
4. Na przestrzeni mierzalnej $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ definiujemy funkcję
$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ \sum_{n\in A} \frac{1}{2^n} + \sum_{n\notin A} \frac{1}{3^n}, & A \neq \emptyset. \end{cases}$$
   Sprawdzić, czy μ jest miarą.
5. Definiujemy zbiory $B_n = (n, n + \frac{1}{n}) \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_1$ i $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} B_n$ oraz funkcję
$$f(x) = \sum_{n=1}^{15} [x]^2 1_{B_n}(x).$$
   (a) Uzasadnić mierzalność zbioru B względem miary Lebesgue'a λ i obliczyć $\lambda(B)$.
   (b) Uzasadnić, że f jest mierzalną, nieujemną funkcją prostą oraz obliczyć całkę $\displaystyle\int_{[0,6]} f d\lambda$.