KOLOKWIUM 1

WRAiT 1, 28.11.2017

O ile nie zaznaczono inaczej, we wszystkich zadaniach: zakładamy, że (X, d) jest przestrzenią metryczną; $\mathbb{R}^n$ i jej podzbiory rozpatrujemy z metryką euklidesową d_E. Metrykę taksówkową oznaczamy d_T, metrykę rzeka d_R, metrykę centrum d_C, metrykę dyskretną d_D.

1. Czy poniższe zdania są prawdziwe? Odpowiedź krótko uzasadnić.
   (a) Domknięcie kuli otwartej jest zbiorem domkniętym.
   (b) Zbiór A jest nigdziegęsty wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Cl}(A)$ jest nigdziegęsty.
   (c) Każdy zbiór spójny jest otwarty.
   (d) Istnieje ciągła surjekcja z $X = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1]\}$ w $Y = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.
   (e) Funkcja $f : (X, d_E) \ni x \mapsto x \in (X, d_D)$ jest ciągła.

2. Na zbiorze $\mathbb{R}^2$, dla $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ zadajemy odwzorowanie:
$$\rho(x, y) = \begin{cases} |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}.$$
   (a) Sprawdzić, że $(\mathbb{R}^2, \rho)$ jest przestrzenią metryczną.
   (b) Narysować kule $K((0, 0), \frac{1}{2})$ i $K((0, 0), 3)$ w tej metryce.

3. Sprawdzić, czy
   (a) $\{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in (-1, 1)\}$ jest otwarty w $(\mathbb{R}^2, d_C)$;
   (b) $\{1 + \frac{k}{n} \colon n \in \mathbb{N}_1, k \in \{0, 1\}\}$ jest domknięty w $(\mathbb{R}, d_E)$;
   (c) $\{3^n \colon n \in \mathbb{N}\}$ jest zwarty w $(\mathbb{R}, d_E)$.
   (d) $\mathbb{Q}$ jest gęsty w $(\mathbb{R}, d_D)$.

4. Wykazać, że
$$\mathrm{Bd}(\mathrm{Cl}(A)) \subset \mathrm{Bd}(A)$$
   i podać przykład, że zawieranie w drugą stronę nie musi zachodzić.

5. Zbadać ciągłość funkcji:
   (a) $f : (\mathbb{R}^2, d_R) \to (\mathbb{R}, d_E)$, $\quad f(x_1, x_2) = x_2$.
   (b) $g : (\mathbb{R}^2, d_E) \to (\mathbb{R}^2, d_T)$, $\quad g(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2)$.

   Czy któraś z nich jest homeomorfizmem?