EGZAMIN

WRAiT 1, 1.02.2018

1. Czy poniższe zdania są prawdziwe? Odpowiedź krótko uzasadnić.

(a) Ciąg $x_n = (1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ nie jest zbieżny w metryce rzeka.

TAK, odległości między dowolnymi dwoma różnymi elementami x_n i x_m tego ciągu wynoszą $d_R(x_n, x_m) = 1 + \frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{m} + |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| > 2$, czyli ciąg nie jest Cauchy'ego. Każdy ciąg zbieżny jest Cauchy'ego.

(b) W przestrzeni metrycznej każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.

NIE, w przestrzeni $((0,1), d_E)$ ciąg $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ jest ciągiem Cauchy'ego (bo dla $n > m$ mamy $d_E\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \leq \frac{1}{n} \to 0$ przy $n \to \infty$), ale nie jest zbieżny.

(c) Jeśli (X, d) jest ośrodkowa, to jest spójna.

NIE, np. przestrzeń $((0,1) \cup (2,3), d_E)$ jest ośrodkowa (ośrodek do $\mathbb{Q} \cap ((0,1) \cup (2,3))$, ale nie jest spójna.

(d) Jeśli A jest podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d) i $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Int}(A)$, to A jest domknięty.

TAK, zawsze mamy $\mathrm{Int}(A) \subseteq A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$, czyli założenie $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Int}(A)$ implikuje $\mathrm{Cl}(A) = A = \mathrm{Int}(A)$. Zbiór $\mathrm{Cl}(A)$ jest domknięty.

(e) Funkcja $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ jest funkcją ciągłą $(\mathbb{R}, d_D) \to (\mathbb{R}, d_E)$.

TAK, w $(\mathbb{R}, d_D)$ wszystkie podzbiory są otwarte, czyli w szczególności przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego jest otwarty.

(f) Każda funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest mierzalna względem σ-ciała $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ w dziedzinie i $\{\emptyset, \mathbb{R}\}$ σ-ciała w obrazie.

TAK, dowolny podzbiór $\mathbb{R}$ jest mierzalny względem σ-ciała $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, czyli w szczególności dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mierzalne są przeciwobrazy $\emptyset$ i $\mathbb{R}$.

(g) Jeśli zbiór borelowski $A \subset \mathbb{R}$ jest nieograniczony, to $\lambda(A) = \infty$.

NIE, $\mathbb{Q}$ jest nieograniczony i $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.

(h) Istnieje zbiór borelowski A taki, że $\mathrm{Int}\, A$ nie jest borelowski.

NIE, $\mathrm{Int}\, A$ jest otwarty, więc mierzalny.

(i) Dla dowolnej przestrzeni mierzalnej $(X, \mathcal{A})$ i dowolnego zbioru $B \subset X$ suma funkcji $\mathcal{A}$-mierzalnej i funkcji charakterystycznej $\mathbb{1}_B$ jest mierzalna.

NIE, rozważmy $\mathbb{R}$ i σ-ciało zbiorów borelowskich , niech B będzie zbiorem Vitaliego, $f \equiv 0$. Funkcja $g = f + \mathbb{1}_B$ nie jest borelowska, bo $g = \mathbb{1}_B$ i B nie jest borelowski.

(j) Istnieje funkcja borelowska $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest ciągła poza dokładnie trzema punktami.

TAK, przykładem takiej funkcji jest $f = \mathbb{1}_{\{1\}} + \mathbb{1}_{\{2\}} + \mathbb{1}_{\{3\}}$.

2. Na zbiorze $\mathbb{R}$ zadajemy metrykę:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x = y, \\ 2, & \text{gdy } x \neq y \text{ i } (x, y \in \mathbb{Q} \text{ lub } x, y \notin \mathbb{Q}) \\ 1, & \text{gdy } (x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}) \text{ lub } (x \notin \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}) \end{cases}.$$

(a) Wykazać, że ρ jest metryką na $\mathbb{R}$.

Sprawdzamy kolejno warunki z definicji metryki.
Dodatnia określoność. Z definicji $\rho(x,y) = 0$ jeśli $x = y$ oraz $\rho(x,y) \geq 1$ dla $x \neq y$.
Symetria. Wynika z tego, że warunki w definicji ρ są symetryczne ze względu na x i y.
Warunek trójkąta. Weźmy dowolne $x, y, z \in \mathbb{R}$. Rozważmy przypadki.
Przypadek 1. $x = y$. Wtedy $\rho(x,y) = 0 \leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$.
Przypadek 2. $x \neq y$ i $x, y \in \mathbb{Q}$ lub $x, y \notin \mathbb{Q}$. Jeśli $x = z$ lub $y = z$ to nierówność trójkąta jest oczywista, w przeciwnym wypadku $\rho(x,z), \rho(y,z) \geq 1$, czyli $\rho(x,y) = 2 \leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$.
Przypadek 3. $(x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q})$ lub $(x \notin \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q})$. Jeśli $x = z$ lub $y = z$ to nierówność trójkąta jest oczywista, w przeciwnym wypadku $\rho(x,z), \rho(y,z) \geq 1$, czyli $\rho(x,y) = 1 \leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$.

(b) Jak wyglądają kule $K(\pi, 1)$, $K(1, e)$, $K(\ln 2, \frac{3}{2})$?

Mamy $K(\pi, 1) = \{\pi\}$, ponieważ nie istnieją punkty różne od π odległe od π o mniej niż 1. Odległość dowolnych dwóch punktów nie przekracza $2 < e$, czyli $K(1, e) = \mathbb{R}$. Liczba $\ln 2$ jest niewymierna oraz $1 < \frac{3}{2} < 2$, czyli $K(\ln 2, \frac{3}{2}) = \mathbb{Q} \cup \{\ln 2\}$.

3. Na zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ zadajemy metrykę

$$d_*(k, m) = |k - m|.$$

(a) Wykazać, że ciąg $(x_n)_n \subset \mathbb{Z}$ jest zbieżny do x względem metryki d_* wtedy i tylko wtedy, gdy jest stały od pewnego miejsca.

Ciąg stały od pewnego miejsca oczywiście jest zbieżny. Aby udowodnić przeciwną implikację weźmy dowolny ciąg $(x_n)_n$ zbieżny do x względem d_*. Istnieje takie $N \in \mathbb{N}_1$, że dla $n \geq N$ mamy $|x - x_n| < \frac{1}{2}$. Ponieważ $(x_n)_n$ składa się z liczb całkowitych i x jest całkowite, to oznacza, że $x_n = x$ dla wszystkich $n \geq N$, czyli $(x_n)_n$ jest stały od pewnego miejsca.

(b) Czy $\{2\}$ jest zbiorem otwartym?

Tak, $\{2\}$ jest kulą o środku w 2 i promieniu $\frac{1}{2}$ względem metryki d_*.

(c) Czy $(\mathbb{Z}, d_*)$ jest spójna?

Zbiór $\mathbb{Z} \setminus \{2\}$ jest otwarty jako suma kul: $\mathbb{Z} \setminus \{2\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{2\}} K(n, 1/2)$. Zbiór $\{2\}$ też jest otwarty, zatem $\mathbb{Z}$ można zapisać jako sumę dwóch rozłącznych zbiorów otwartych $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z} \setminus \{2\}) \cup \{2\}$. Czyli $(\mathbb{Z}, d_*)$ nie jest spójna.

(d) Czy $(\mathbb{Z}, d_*)$ jest ośrodkowa?

Tak, $\mathbb{Z}$ jest ośrodkiem w tej przestrzeni - jest przeliczalny oraz $\mathrm{Cl}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

4. Sprawdzić, czy podane przestrzenie są homeomeorficzne. Wskazać homeomorfizm (sprawdzić, że jest homeomorfizmem) lub uzasadnić, że jest to niemożliwe.

   (a) $([0,1], d_E)$ i $((0,10), d_E)$,

Homeomorfizm nie istnieje, ponieważ $([0,1], d_E)$ jest zwarta a $((0,10), d_E)$ nie jest. Gdyby $f : ([0,1], d_E) \to ((0,10), d_E)$ było homeomorfizmem, to f i f^{-1} byłyby ciągłe. Obrazem zbioru zwartego $[01,]$ byłby zbiór zwarty, a $(0,10)$ nie jest zwarty (bo nie jest domknięty).

   (b) $(\mathbb{R}, d_E)$ i $((0,+\infty), d_E)$,

Funkcja $f(x) = e^x$ jest homeomorfizmem: jest ciągła, istnieje funkcja odwrotna $f^{-1}(x) = \ln x$, która jest ciągła jako funkcja $((0,+\infty), d_E) \to (\mathbb{R}, d_E)$.

   (c) $(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, x \neq 0\}, d_E)$, $([-e,e), d_E)$,

Homeomorfizm nie istnieje, ponieważ $(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, x \neq 0\}, d_E)$ nie jest spójna (jako suma dwóch otwartych "połówek koła") a przestrzeń $([-e,e), d_E)$ jest spójna. Homeomorfizm przenosi spójność.

   (d) $(\mathbb{R}^2, d_T)$ i $(\mathbb{R}, d_D)$.

Homeomorfizm nie istnieje, ponieważ $(\mathbb{R}^2, d_T)$ jest ośrodkowa a $(\mathbb{R}, d_D)$ ośrodkowa nie jest. Homeomorfizm przenosi ośrodkowość.

5. Obliczyć całki:

   (a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=3}^{7} \ln([x]) \mathbb{1}_{[k,k+\frac{1}{2})}(x) \right) \, d\lambda(x)$, gdzie λ oznacza miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}$;

   Funkcję podcałkową można inaczej zapisać jako

   $$f(x) = \ln 3 \mathbb{1}_{[3,3+\frac{1}{2})}(x) + \ln 4 \mathbb{1}_{[4,4+\frac{1}{2})}(x) + \ln 5 \mathbb{1}_{[5,5+\frac{1}{2})}(x) + \ln 6 \mathbb{1}_{[6,6+\frac{1}{2})}(x) + \ln 7 \mathbb{1}_{[7,7+\frac{1}{2})}(x).$$

   Jest to funkcja prosta–nieujemna, każdy z odcinków występujących w powyższej sumie ma miarę $\frac{1}{2}$, czyli całka wynosi $\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{7} \ln k = \ln 6\sqrt{70}$.

   (b) $\displaystyle\int_A x \sin(e^{2x^2}) \, d\lambda(x)$, gdzie $A = \{n \in \mathbb{N}_1 : n^2+5 < 13\}$;

   Zbiór A jest przeliczalny, czyli $\lambda(A) = 0$, co implikuje $\displaystyle\int_A x \sin(e^{2x^2}) \, d\lambda(x) = 0$.

   (c) $\displaystyle\int_B \mathbb{1}_{\mathbb{Z}} \, d\mu$, gdzie $B = [-\pi, \pi]$, $\mathbb{Z}$ oznacza liczby całkowite, a μ oznacza miarę liczącą.

   Z definicji mamy $\displaystyle\int_B \mathbb{1}_{\mathbb{Z}} \, d\mu = \int_{\mathbb{Z}} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}} \mathbb{1}_B \, d\mu = \int_{\mathbb{Z}} \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \cap B} \, d\mu$. Funkcja podcałkowa jest funkcją prostą–nieujemną. Całka wynosi $\mu(\mathbb{Z} \cap B) = \mu(B)$, zbiór $\mathbb{Z} \cap B$ ma 7 elementów, czyli $\mu(B) = 7$.

   (d) $\displaystyle\int_C \ln(x+e) \, d\delta_0$, gdzie $C = [-1,1]$.

   Całka z funkcji f względem miary δ_a po zbiorze C takim, że $a \in C$ wynosi $f(a)$, czyli $\displaystyle\int_C \ln(x+e) \, d\delta_0 = \ln(e) = 1$.

6. Dla $n \in \mathbb{N}_1$ definiujemy

$$f_n(x) = \frac{2n^3x + 5n + 4}{n^3x + 2n}, \quad x \in [0,1].$$

(a) Wyznaczyć granicę punktową f ciągu $(f_n)_n$ i zbadać, czy $(f_n)_n$ dąży do f jednostajnie na $[0,1]$.

Granica punktowa. Ustalmy $x \in [0,1]$. Jeśli $x = 0$, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3x + 5n + 4}{n^3x + 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n+4}{2n} = \frac{5}{2}.$$

Jeśli $x \neq 0$, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3x + 5n + 4}{n^3x + 2n} = 2.$$

To oznacza, że

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} \text{ jeśli } x = 0, \\ 2 \text{ jeśli } x \neq 0. \end{cases}$$

Zbieżność jednostajna. Funkcje f_n są ciągłe, ale f nie jest funkcją ciągłą. Gdyby zbieżność była jednostajna, to f byłoby funkcją ciągłą.

(b) Uzasadnić mierzalność f_n $(n \in \mathbb{N})$ i f.

Funkcje f_n są ciągłe, co implikuje mierzalność. Funkcja f jest funkcją prostą–nieujemną: $f = 2\mathbb{1}_{(0,1]} + \frac{5}{2}\mathbb{1}_{\{0\}}$, więc jest mierzalna.

(c) Obliczyć $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{[0,1]} f_n \, d\lambda$, gdzie λ oznacza miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}$.

Skorzystamy z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej. Sprawdźmy kolejno jego założenia.
Mierzalność. Funkcje f_n są mierzalne z poprzedniego podpunktu.
Zbieżność punktowa. $f_n \to f$ z podpunktu (a).
Całkowalna majoranta. Sprawdzimy, że $g(x) = 11$ jest całkowalną majorantą dla ciągu f_n. Mamy

$$|f_n(x)| = \left| \frac{2n^3x + 5n + 4}{n^3x + 2n} \right| \leq \frac{2n^3x}{n^3x + 2n} + \frac{5n}{n^3x + 2n} + \frac{4}{nx^3 + 2n} \leq 2 + 5 + 4 = 11.$$

Mamy $\int_{[0,1]} |g| \, d\lambda = 11$, czyli g jest całkowalną majorantą dla f_n.
Na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej mamy

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n \, d\lambda = \int_{[0,1]} \lim_{n\to+\infty} f_n \, d\lambda = \int_{[0,1]} f \, d\lambda.$$

Funkcja f jest funkcją prostą-nieujemną, czyli jej całka wynosi $2\lambda((0,1]) + \frac{5}{2}\lambda(\{0\}) = 2$.