EGZAMIN

WRAiT 1, 1.02.2018

O ile nie zaznaczono inaczej, we wszystkich zadaniach: $\mathbb{R}^n$ i jej podzbiory rozpatrujemy z metryką euklidesową d_E i miarą Lebesgue'a λ_n. Metrykę taksówkową oznaczamy d_T, metrykę rzeka d_R, metrykę centrum d_C, metrykę dyskretną d_D. Przez δ_a oznacza miarę Diraca skupioną w a, przez λ – miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}$. Wszystkie odpowiedzi wymagają uzasadnień!

1. Czy poniższe zdania są prawdziwe? Odpowiedź krótko uzasadnić.
   (a) Ciąg $x_n = (1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ nie jest zbieżny w metryce rzeka.
   (b) W przestrzeni metrycznej każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.
   (c) Jeśli (X, d) jest ośrodkowa, to jest spójna.
   (d) Jeśli A jest pozdbiorem przestrzeni metrycznej (X, d) i $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Int}(A)$, to A jest domknięty.
   (e) Funkcja $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ jest funkcją ciągłą $(\mathbb{R}, d_D) \to (\mathbb{R}, d_E)$.
   (f) Każda funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest mierzalna względem σ-ciała $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ w dziedzinie i $\{\emptyset, \mathbb{R}\}$ σ-ciała w obrazie.
   (g) Jeśli zbiór borelowski $A \subset \mathbb{R}$ jest nieograniczony, to $\lambda(A) = \infty$.
   (h) Istnieje zbiór borelowski A taki, że $\mathrm{Int}\, A$ nie jest borelowski.
   (i) Dla dowolnej przestrzeni mierzalnej $(X, \mathcal{A})$ i dowolnego zbioru $B \subset X$ suma funkcji $\mathcal{A}$-mierzalnej i funkcji charakterystycznej $\mathbb{1}_B$ jest mierzalna.
   (j) Istnieje funkcja borelowska $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest ciągła poza dokładnie trzema punktami.

2. Na zbiorze $\mathbb{R}$ zadajemy odwzorowanie:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x = y, \\ 2, & \text{gdy } x \neq y \text{ i } (x, y \in \mathbb{Q} \text{ lub } x, y \notin \mathbb{Q}) \\ 1, & \text{gdy } (x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}) \text{ lub } (x \notin \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}) \end{cases}.$$

   (a) Wykazać, że ρ jest metryką na $\mathbb{R}$.
   (b) Jak wyglądają kule $K(\pi, 1)$, $K(1, e)$, $K(\ln 2, \frac{3}{2})$?

3. Na zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ zadajemy metrykę

$$d_*(k, m) = |k - m|.$$

   (a) Wykazać, że ciąg $(x_n)_n \subset \mathbb{Z}$ jest zbieżny do x względem metryki d_* wtedy i tylko wtedy, gdy jest stały od pewnego miejsca.
   (b) Czy $\{2\}$ jest zbiorem otwartym?
   (c) Czy $(\mathbb{Z}, d_*)$ jest spójna?
   (d) Czy $(\mathbb{Z}, d_*)$ jest ośrodkowa?

4. Sprawdzić, czy podane przestrzenie są homeomeorficzne. Wskazać homeomorfizm (sprawdzić, że jest homeomorfizmem) lub uzasadnić, że jest to niemożliwe.

   (a) $([0,1], d_E)$ i $((0,10), d_E)$,

   (b) $(\mathbb{R}, d_E)$ i $((0,+\infty), d_E)$,

   (c) $(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, x \neq 0\}, d_E)$, $([-e,e), d_E)$,

   (d) $(\mathbb{R}^2, d_T)$ i $(\mathbb{R}, d_D)$.

5. Obliczyć całki:

   (a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=3}^{7} \ln([x]) \mathbb{1}_{[k,k+\frac{1}{2})}(x) \right) \, d\lambda(x)$, gdzie λ oznacza miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}$;

   (b) $\displaystyle\int_A x \sin(e^{2x^2}) \, d\lambda(x)$, gdzie $A = \{n \in \mathbb{N}_1 : n^2 + 5 < 13\}$;

   (c) $\displaystyle\int_B \mathbb{1}_{\mathbb{Z}} \, d\mu$, gdzie $B = [-\pi, \pi]$, $\mathbb{Z}$ oznacza liczby całkowite, a μ oznacza miarę liczącą.

   (d) $\displaystyle\int_C \ln(x+e) \, d\delta_0$, gdzie $C = [-1,1]$.

6. Dla $n \in \mathbb{N}_1$ definiujemy
$$f_n(x) = \frac{2n^3x + 5n + 4}{n^3x + 2n}, \quad x \in [0,1].$$

   (a) Wyznaczyć granicę punktową f ciągu $(f_n)_n$ i zbadać, czy $(f_n)_n$ dąży do f jednostajnie na $[0,1]$.

   (b) Uzasadnić mierzalność f_n $(n \in \mathbb{N})$ i f.

   (c) Obliczyć $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n \, d\lambda$, gdzie λ oznacza miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}$.