

1. Podać przykład, że istnieje lub krótko udowodnić, że nie istnieje:

- (a) liczba $z \in \mathbb{C}$ taka, że $\operatorname{ctg} z = -i$;
- (b) funkcja holomorphyzna na \mathbb{C} , która ma drugą pochodną tylko w jednym punkcie;
- (c) obszar w \mathbb{C} , który nie jest jednospójny;
- (d) niestała funkcja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dla której $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$, gdzie γ jest dowolną krzywą zamkniętą, regularną i prostowalną;
- (e) funkcja holomorphyzna, której częścią rzeczywistą jest funkcja $u(x, y) = xy + 2x^2$.

2. Sprawdzić, dla jakich $z \in \mathbb{C}$ funkcja

$$f(z) = ze^{|z|^2}$$

ma pochodną i określić, w jakim zbiorze f jest holomorphyzna.

3. Pokazać, że dla $z, w \in \mathbb{C}$ zachodzi własność

$$\operatorname{Log} zw = \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w + 2n\pi i,$$

gdzie $n \in \{-1, 0, 1\}$.

4. Obliczyć całkę krzywoliniową

$$\int_{\gamma} \bar{z}(3z^2 + 1)dz$$

po krzywej γ , będącej łukiem okręgu o środku w punkcie 0, od punktu $2i$ do punktu $-2i$.

5. Obliczyć całkę

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2(z - 2i)}dz,$$

- (a) gdy γ jest okręgiem o środku w punkcie 0 i promieniu $\frac{3}{2}$,
- (b) gdy γ jest kwadratem o wierzchołkach $4 + 4i$, $-4 + 4i$, $-4 - 4i$ i $4 - 4i$.

1. Podać przykład, że istnieje lub krótko udowodnić, że nie istnieje:

- (a) liczba $z \in \mathbb{C}$ taka, że $\text{Log}(z - \bar{z}) = i\frac{\pi}{3}$;
- (b) funkcja holomorphyzna na \mathbb{C} , która ma pierwszą pochodną tylko w jednym punkcie;
- (c) zbiór w \mathbb{C} , który jest spójny i jednospójny, ale nie jest otwarty;
- (d) niestała funkcja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dla której $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$, gdzie γ jest dowolną krzywą zamkniętą, regularną i prostowalną;
- (e) funkcja holomorphyzna, której częścią rzeczywistą jest funkcja $u(x, y) = y^2 + 2x^2$.

2. Sprawdzić, dla jakich $z \in \mathbb{C}$ funkcja

$$f(z) = z|z|^2 + i$$

ma pochodną i określić, w jakim zbiorze f jest holomorphyzna.

3. Pokazać, że dla $z, w \in \mathbb{C}$ zachodzi własność

$$\text{Log } zw = \text{Log } z + \text{Log } w + 2n\pi i,$$

gdzie $n \in \{-1, 0, 1\}$.

4. Obliczyć całkę krzywoliniową

$$\int_{\gamma} \frac{4 + \bar{z}}{z} dz$$

po krzywej γ , będącej łukiem okręgu o środku w punkcie 0, od punktu $3i$ do $-3i$.

5. Obliczyć całkę

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z(z-1)^2} dz,$$

- (a) gdy γ jest okręgiem o środku w punkcie 1 i promieniu $\frac{1}{2}$,
- (b) gdy γ jest kwadratem o wierzchołkach $4 + 4i$, $-4 + 4i$, $-4 - 4i$ i $4 - 4i$.

KOŁOKWIUM 2 WRAiT2, 6.06.2016

1. Podać przykład, że istnieje lub stwierdzić, że nie istnieje (w obu przypadkach uzasadnić odpowiedź):

- (a) szereg potęgowy o środku $z_0 = i$ zbieżny w $3i$, a rozbieżny w 0 ;
- (b) para funkcji f i g oraz punkt z_0 takie, że f ma w z_0 biegun rzędu 3, a $f + g$ ma w z_0 biegun rzędu 2;
- (c) funkcja f , która ma w z_0 biegun rzędu 2 i $\text{Res}_{z_0} f = 0$;
- (d) funkcja holomorphyzna w $K(0, \frac{5}{4})$ i taka, że $f(0) = \frac{1}{3}$, $f'(0) = 5$ i $|f(z)| < 3$ dla $|z| = 1$;
- (e) ciąg $(a_n)_n$ należący do ℓ_2 i nie należący do ℓ_∞ .

2. Znaleźć rozwinięcie w szereg Laurenta funkcji

$$f(z) = \frac{z - 2}{(z + 1)^2(z - 3)}$$

w pierścieniu $0 < |z + 1| < 4$. Wypisać wzór na współczynniki szeregu.

3. Obliczyć całkę

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}\pi} \frac{z - 1}{z \sin z} dz.$$

4. Obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 10x^2 + 9} dx.$$

5. Sprawdzić, czy jeśli p_1 i p_2 są normami na przestrzeni X , to

$$p(x) = \max\{p_1(x), p_2(x)\}$$

też jest normą na X .