Imię i nazwisko

1	2	3	4	5	6	Suma
10	10	10	10	10	10	60

EGZAMIN WRAiT2, 16.06.2016

1. Czy podane niżej stwierdzenia są prawdziwe? Odpowiedź uzasadnić.
   (a) funkcja exp przekształca prostą $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z = a\}$ w okrąg $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = e^a\}$;
   (b) jeśli f jest funkcją holomorficzną na obszarze D i $\operatorname{Im}(f)$ jest funkcją stałą na D, to f jest funkcją stałą na D;
   (c) całka z funkcji $f(z) = \frac{z^2-1}{e^z}$ po okręgu $|z| = 1$ wynosi 0;
   (d) funkcja holomorficzna ma co najwyżej skończoną liczbę zer;
   (e) każdy ciąg $(a_n)_n$ należący do c_0 należy także do ℓ_1.
2. Sprawdzić, na jakim zbiorze funkcja
$$g(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2} & \text{dla } z \neq 0 \\ 0 & \text{dla } z = 0 \end{cases}$$
   jest holomorficzna.
3. Znaleźć rozwinięcie funkcji $f(z) = \dfrac{z-i}{z+2i}$ w szereg potęgowy o środku $z_0 = i$. Zbadać promień zbieżności i zachowanie na brzegu koła zbieżności.
4. Metodami zespolonymi obliczyć całki:
   (a) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{ze^z}{(z+2)^2(z-1)}\,\mathrm{d}z$,
   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x$,
5. Znaleźć minimum i maksimum modułu funkcji $f(z) = z^2 - 3z + 1$ w kole $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$.
6. Korzystając z faktu, że $\|a\|_\infty = \sup_{n\geqslant 1} |a_n|$ jest normą na przestrzeni ciągów ℓ_∞, wykazać, że
$$\|a\|_* = 2|a_1| + \|a\|_\infty$$
   też jest normą na ℓ_∞. Sprawdzić, czy norma $\|.\|_*$ pochodzi od iloczynu skalarnego?