Elementy logiki

Matematyka dla chemii ogólnej, 2016

Literatura

[1] K. Dróbka, N. Szymański, *Matematyka w szkole średniej. Powtórzenie i zbiór zadań*, WNT 1993.

[2] R. Antoniewicz, A. Misztal, *Matematyka dla studentów ekonomii. Wykłady z ćwiczeniami*, PWN 1997.

1 Praca z tekstem

Przeczytaj przygotowane fragmenty książek dotyczące rachunku zdań i spróbuj wykonać poniższe polecenia. Być może będziesz musiał przeczytać niektóre akapity kilka razy, aby je zrozumieć – to normalne! Zwróć uwagę na to, że w obu tekstach pojawiają się inne oznaczenia kwantyfikatorów niż na wykładzie. W tekście [2] możesz opuścić fragmenty o notacji beznawiasowej. W razie trudności, zajrzyj do Rozdziału 1 skryptu E. Bryniarskiego "Logika dla opornych" (dostępny na stronie: `www.math.uni.opole.pl/~ebryniarski/logika_dla_opornych.pdf`). Tekst nie jest tak precyzyjny jak dwa poprzednie i jest znacznie dłuższy, ale znajdziesz tam jeszcze więcej przykładów.

1. Wypisz z tekstu [1] definicje: zdania (w sensie logicznym), prawa rachunku zdań, poprzednika implikacji, formy zdaniowej oraz listę spójników tworzących zdania złożone. Znajdź odpowiadające im nazwy w tekście [2]

2. Znajdź tabelę wartości zdań połaczonych spójnikami logicznymi i odczytaj z niej, kiedy:
   - koniunkcja jest fałszywa,
   - alternatywa jest prawdziwa,
   - implikacja jest fałszywa,
   - równoważność jest prawdziwa.

3. Co to jest poprzednik implikacji, a co to jest następnik? Podaj przykład.

4. Wypisz prawa de Morgana (dla zdań i dla kwantyfikatorów) i podaj przykłady ich użycia.

5. Opisz metodę zerojedynkową sprawdzania prawdziwości zdań złożonych i zastosuj ją do sprawdzenia prawa de Morgana: $[\sim (p \vee q)] \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$.

6. Podaj (znajdź w tekście lub wymyśl) przykład formy zdaniowej, jednego elementu, który spełnia tę formę zdaniową i jednego elementu, który formy nie spełnia. Do podanej formy zdaniowej dodaj kwantyfikator, aby uzyskać zdanie i określ jego wartość logiczną. Podaj przykład wyrażenia, które nie jest ani zdaniem, ani formą zdaniową.

7. Znajdź w tekście przykład na to, że zmiana kolejności kwantyfikatorów wpływa na wartość logiczną zdania.

8. Znajdź w tekście przykład błędnego koła tworzonego przez dwie definicje. Spróbuj znaleźć inny przykład takiej sytuacji.

9. Znajdź w tekście definicję definicji równoważnych i podaj przykład takich definicji dla kwadratu.

10. Znajdź w tekście *prawo transpozycji*. Przy pomocy metody zerojedynkowej, udowodnij, że jest ono prawem rachunku zdań. Zastosuj to prawo do równoważnego przekształcenia implikacji: "jeśli czworokąt jest rombem, to jego przekątne są prostopadłe".

11. Podaj kilka warunków koniecznych oraz kilka warunków wystarczających na podzielność liczby przez 12.

2 Zadania

Zakładamy, że $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

1. Korzystając z tabeli wartości zdań połaczonych spójnikami logicznymi (oraz swojej wiedzy z matematyki), oceń wartość logiczną zdań:

   a) $3 < \pi \ \wedge 4 < e$.
   b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$ jest funkcją rosnącą lub każda funkcja wielomianowa jest rosnąca.
   c) Jeśli funkcja $\arcsin$ jest okresowa, to 60 jest podzielne prze 15.
   d) Liczba dzieli się przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy dzieli się przez 2.
   e) $\forall_{n\in\mathbb{N}}$ n jest parzyste lub n jest nieparzyste.
   f) $\exists n \in \mathbb{N}\ (n^2 + 1 = 10)$.
   g) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \exists_{m\in\mathbb{N}}\ (m \leq n)$.
   h) $\exists_{n\in\mathbb{N}}\ \forall_{m\in\mathbb{N}}\ (m \leq n)$.
   i) Funkcja rosnąca na $\mathbb{R}$ jest różnowartościowa.

2. Czy prawdziwe jest zdanie: "Jeżeli liczba naturalna n dzieli sie przez 3, to z faktu, że n nie dzieli się przez 3 wynika, że n dzieli się przez 5."?

3. Sprawdź, które z podanych wyrażeń jest prawem rachunku zdań (tautologią):

   a) $p \Rightarrow (p \vee q)$, b) $[(p \vee q)\wedge \sim p] \Rightarrow p$, c) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$, d) $(p\wedge \sim q) \Rightarrow q$.

4. Wykaż (metodą zerojedynkową), że zaprzeczeniem implikacji $p \Rightarrow q$ jest $p \wedge \sim q$, tzn. że zdanie $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$ jest prawem rachunku zdań tautologią.

5. Podane zdania podziel na zdania proste połączone spójnikami logicznymi. Następnie korzystając z praw de Morgana i zadania poprzedniego, utwórz ich zaprzeczenia.

   (a) Marek spędza wakacje w Grecji lub Hiszpanii.

   (b) Beata uczy się języka francuskiego i angielskiego.

   (c) Jeśli skończysz studia, to znajdziesz ciekawą pracę.

   (d) Wszyscy studenci lubią matematykę.

   (e) Istnieje człowiek, który zna swoją przyszłość.

6. Które spośród pary zdań jest prawdziwe? Utwórz zaprzeczenie zdania fałszywego.

   (a) Istnieje liczba naturalna nieparzysta i podzielna przez 10.
   Istnieje liczba naturalna nieparzysta i istnieje liczba naturalna podzielna przez 10.

(b) Każdy kwadrat jest prostokątem.
Każdy prostokąt jest kwadratem.

(c) 17 jest liczbą pierwszą i liczbą parzystą.
17 jest liczbą pierwszą lub liczbą parzystą.

7. Korzystając z praw de Morgana przekształć następujące zdania tak, aby otrzymać zdania, w których nie występuje spójnik $\sim$ ("nieprawda, że") i oceń wartość logiczną tych zdań

   a) $\sim \big[\forall_{a\in\mathbb{N}_0}(a \geq 1 \vee a = 0)\big]$.
   b) $\sim \big[\forall_{x\in\mathbb{R}}\, \forall_{y\in\mathbb{R}}\, (x^2 = y^2 \Rightarrow x = y)\big]$.
   c) $\sim \big[\exists_{k\in\mathbb{N}}\, \exists_{m\in\mathbb{N}}\, \exists_{n\in\mathbb{N}}\, (k^3 + m^3 = n^3)\big]$ (twierdzenie Fermata).

8. Zapisz w postaci implikacji $p \Rightarrow q$ stwierdzenia oraz wskaż założenie i tezę.

   a) W trójkącie prostokątnym zachodzi $a^2 + b^2 = c^2$.
   b) Dla każdej liczby parzystej n liczba n^2 też jest parzysta.
   c) Liczba n dzieli się przez 15, o ile n dzieli się przez 5 i $2n$ dzieli się przez 3.
   d) Funkcja rosnąca jest różnowartościowa.

9. Sformułuj warunek (a) wystarczający, ale niekonieczny, (b) konieczny, ale niewystarczający, (c) wystarczający i konieczny na to, aby liczba m była podzielna przez 24.

10. Zapisz przy pomocy symboli matematycznych i logicznych następujące fakty:

    (a) Każda liczba rzeczywista dodatnia posiada pierwiastek kwadratowy.
    (b) Każda niezerowa liczba wymierna posiada swoja odwrotność.
    (c) Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną.
    (d) Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący.
    (e) Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest różnowartościowy.
    (f) Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony.
    (g) Wartość bezwzględna z wartości funkcji $\sin x$ jest mniejsza lub równa 1.