7. $\emptyset$.

9. $\{(5,7),(5,8),(5,9),(6,7),(6,8),(6,9),(7,7);(7,8),(7,9)\}$.

10. 180, 180, 144, 225.

11. a) D i E, b) D i E.

12. a) tak, b) tak.

2. Zdania i formy zdaniowe

2.1. Zdania

Zdaniami w sensie logicznym nazywamy te spośród zdań oznajmujących, którym można przypisać jedną z dwóch wartości logicznych: prawdę lub fałsz.

Zgodnie z tym określeniem nie są zdaniami (w sensie logicznym) zdania pytające lub rozkazujące, nie są nimi również te zdania oznajmujące, o których nie potrafimy orzec, czy są prawdziwe, czy fałszywe.

Przykładami zdań są: Warszawa jest stolicą Polski; $2+2=5$; każda liczba pierwsza jest nieparzysta; istnieje czworokąt, który ma wszystkie kąty proste. Natomiast nie są zdaniami wyrażenia: liczba 13 jest feralna; Paryż jest najpiękniejszym miastem świata.

Umawiamy się, że odtąd – mówiąc o zdaniach – będziemy mieli na myśli tylko zdania w sensie logicznym.

Wartości logiczne przypisywane zdaniom będziemy oznaczali przez 1 i 0. Liczba 1 przypisana danemu zdaniu oznacza, że jest ono prawdziwe, natomiast 0 – oznacza, że jest fałszywe.

Mając dowolne dwa zdania możemy z nich utworzyć zdanie złożone przez połączenie owych zdań jednym ze spójników: "lub", "i", "jeśli ..., to", "wtedy i tylko wtedy, gdy ". Celem skrócenia zapisu spójniki te oznaczamy specjalnymi symbolami, a mianowicie: lub – $\vee$; i – $\wedge$; jeśli..., to – $\Rightarrow$; wtedy i tylko wtedy gdy – $\Leftrightarrow$.

Dwa zdania połączone spójnikiem $\vee$ nazywamy **alternatywą** tych zdań, a każde ze zdań nazywamy **składnikiem** alternatywy.

Dwa zdania połączone spójnikiem $\wedge$ nazywamy **koniunkcją**, a każde ze zdań nazywamy **składnikiem** koniunkcji.

Dwa zdania połączone spójnikiem $\Rightarrow$ nazywamy **implikacją**, przy czym pierwsze z tych zdań nazywamy **poprzednikiem**, a drugie **następnikiem** implikacji.

Dwa zdania połączone spójnikiem $\Leftrightarrow$ nazywamy **równoważnością**, a zdania, z których jest ona zbudowana, nazywamy odpowiednio lewym i prawym **członem** równoważności.

Jest jeszcze jeden spójnik różniący się od już wymienionych tym, że wiążemy go tylko z jednym zdaniem. Jest nim spójnik **negacji**: "nieprawda, że", oznaczany symbolem $\sim$. Jeśli przed danym zdaniem napiszemy ten spójnik (lub jego symbol), to otrzymamy negację danego zdania.

Jest oczywiste, że jeśli dane zdania lub zdanie mają określoną wartość logiczną, to zdanie złożone, z nich zbudowane, też ma jedną z dwóch wartości logicznych. Związek między wartościami logicznymi zdań składowych, a wartością logiczną zdania złożonego podano w tabelach, w których p, q oznaczają zdania:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

p	$\sim p$
1	0
0	1

Z pierwszej tabeli możemy odczytać, że alternatywa dwóch zdań jest zdaniem fałszywym tylko w jednym przypadku, mianowicie wówczas, gdy oba zdania składowe są fałszywe; koniunkcja dwóch zdań jest zdaniem prawdziwym tylko w jednym przypadku, mianowicie wtedy, gdy oba zdania składowe są prawdziwe; implikacja dwóch zdań jest zdaniem fałszywym tylko w jednym przypadku, mianowicie gdy poprzednik jest zdaniem prawdziwym, a następnik fałszywym; równoważność dwóch zdań jest zdaniem prawdziwym tylko wówczas, gdy oba jej człony mają tę samą wartość logiczną.

Za pomocą podanych tabel możemy w każdym przypadku określić wartość logiczną zdania złożonego. Na przykład zdanie "jeśli 6 jest liczbą pierwszą, to 7 jest liczbą złożoną" jest zdaniem prawdziwym, bo jest to implikacja o fałszywym poprzedniku i następniku. Natomiast zdanie "jeśli 7 jest liczbą pierwszą, to 6 jest liczbą pierwszą" jest zdaniem fałszywym.

Zajmijmy się teraz wyrażeniem $(p \wedge q) \Rightarrow p$, w którym p, q oznaczają dowolne zdania. Zbadajmy, jakie wartości logiczne może przyjmować wyrażenie $(p \wedge q) \Rightarrow p$. Najlepiej to zrobić za pomocą następującej tabeli:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Okazało się, że zdanie zbudowane według schematu $(p \wedge q) \Rightarrow p$ ma zawsze wartość logiczną 1, niezależnie od tego, jakie wartości logiczne mają zdania składowe. Wyrażenie o tej własności nazywamy **prawem rachunku zdań**. Prawa te pozwalają rozstrzygać o prawdziwości zdań złożonych na podstawie ich budowy, bez wnikania w treść zdań składowych. Przedstawiona wyżej metoda sprawdzania nosi nazwę **metody zerojedynkowej**.

Dla przykładu sprawdźmy jeszcze, czy wyrażenie $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ jest prawem rachunku zdań. W tym celu budujemy tabelę:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Zatem jest to prawo rachunku zdań.

Natomiast wyrażenie $(p \vee q) \Rightarrow p$ nie jest prawem rachunku zdań, bo jeśli w miejsce p podstawimy zdanie fałszywe, a w miejsce q – prawdziwe, to otrzymane w ten sposób zdanie złożone będzie fałszywe.

Wśród praw rachunku zdań wyróżnimy tzw. **prawa de Morgana**. Są to następujące prawa:

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

Mówią one o tym, że zaprzeczeniem koniunkcji dwóch zdań jest alternatywa zaprzeczeń tych zdań, a zaprzeczeniem alternatywy dwóch zdań jest koniunkcja ich zaprzeczeń.

Na przykład zaprzeczeniem zdania "liczba 2 jest liczbą pierwszą i liczbą parzystą" jest zdanie "liczba 2 nie jest liczbą pierwszą lub nie jest liczbą parzystą".

2.2. Formy zdaniowe i kwantyfikatory

Równanie $2x - 3 = 5$ nie jest zdaniem, gdyż nie można o nim powiedzieć, czy jest prawdziwe, czy fałszywe. Jeśli jednak w miejsce x podstawimy jakąkolwiek liczbę, to powstanie zdanie. Na przykład dla $x = 4$ otrzymujemy zdanie prawdziwe $2 \cdot 4 - 3 = 5$, natomiast dla $x = 0$ otrzymujemy zdanie fałszywe. Wyrażenia o tej własności nazywamy formami zdaniowymi.

Niech dany będzie niepusty zbiór D. **Formą zdaniową zmiennej x** nazywamy takie wyrażenie, w którym występuje zmienna x i które staje się zdaniem, gdy w miejsce x podstawimy nazwę dowolnego elementu zbioru D. Zbiór D nazywamy **dziedziną formy zdaniowej.**
Zamiast nazwy "forma zdaniowa" można również używać nazwy "funkcja zdaniowa".

Należy podkreślić, że nie każde wyrażenie, w którym występuje zmienna, jest formą zdaniową. Na przykład nie jest formą zdaniową wyrażenie $2x - 3$.

Przyjmujemy, że jeśli ψ oznacza formę zdaniową i $a \in D$, to $\psi(a)$ oznacza zdanie powstałe przez podstawienie do formy w miejsce zmiennej nazwy elementu a.

Mówimy, że **element a dziedziny D spełnia formę zdaniową ψ**, gdy $\psi(a)$ jest zdaniem prawdziwym.

Zapis $\{x \in D : \psi(x)\}$ oznacza zbiór wszystkich elementów spełniających formę zdaniową ψ.

Na przykład:

$\{n \in \boldsymbol{N}: \ 0 < n \leq 5\} = \{1,2,3,4,5\}$,

$\{x \in \boldsymbol{R}: \ 2x - 3 = 5\} = \{4\}$,

$\{x \in \boldsymbol{R}: \ 3x + 1 > 4$ i $2x < 0\} = \emptyset$,

$\{x \in \boldsymbol{C}: \ x \geq 0\} = \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{C}$ oznacza tutaj zbiór liczb całkowitych.

Z określenia formy zdaniowej wynika, że staje się ona zdaniem wówczas, gdy w miejsce zmiennej podstawimy nazwę dowolnego elementu jej dziedziny. Okazuje się, że można formę zdaniową przekształcić w zdanie jeszcze w inny sposób, mianowicie poprzedzając ją tzw. kwantyfikatorem.

Kwantyfikatorami nazywamy zwroty postaci "dla każdego x ", "istnieje x takie, że " i oznaczamy odpowiednio symbolami $\bigwedge_x$, $\bigvee_x$.

Tak więc wyrażenie $2x - 3 = 5$ jest formą zdaniową, natomiast wyrażenie $\bigwedge_{x \in \boldsymbol{R}} (2x - 3 = 5)$ jest zdaniem, które można wypowiedzieć tak: "każda liczba rzeczywista spełnia równanie $2x - 3 = 5$". Jest to oczywiście zdanie fałszywe, bo np. $2 \cdot 1 - 3 \neq 5$.

Podobnie wyrażenie $x^2 - 1 < 0$ jest formą zdaniową, a wyrażenie $\bigvee_{x \in \boldsymbol{N}} (x^2 - 1 < 0)$ jest zdaniem. Jest to zdanie prawdziwe, gdyż $0 \in \boldsymbol{N}$ i $0^2 - 1 < 0$.

Niech ψ oznacza dowolną formę zdaniową o dziedzinie D. Wówczas prawdziwe są zdania:

$$\sim \left(\bigwedge_{x \in D} \psi(x) \right) \Leftrightarrow \bigvee_{x \in D} \sim \psi(x)$$

$$\sim \left(\bigvee_{x \in D} \psi(x) \right) \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in D} \sim \psi(x)$$

Są to **prawa de Morgana dla zdań z kwantyfikatorami.**

Na przykład zdanie "nieprawda, że każda liczba całkowita jest liczbą naturalną " znaczy to samo co zdanie "istnieje liczba całkowita, która nie jest liczbą naturalną ". Oczywiście oba te zdania są prawdziwe.

Analogicznie mamy: $\sim \left[\bigvee_{x \in \boldsymbol{R}} (x^2 + 1 = 0) \right] \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in \boldsymbol{R}} (x^2 + 1 \neq 0)$.

Dotąd rozważaliśmy tylko formy zdaniowe jednej zmiennej, ale można również rozpatrywać formy zdaniowe dwóch i większej liczby zmiennych.

Na przykład nierówność $2x + y < 5$ jest formą zdaniową dwóch zmiennych. Ponieważ w miejsce x i w miejsce y możemy podstawiać dowolne liczby, więc dziedziną tej formy jest iloczyn kartezjański $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$. Poprzedzając tę formę dwoma kwantyfikatorami wiążącymi zmienne x oraz y otrzymamy zdania. Z rozpatrywanej formy można otrzymać 8 zdań. Oto one:

1) $\bigwedge_{x \in \boldsymbol{R}} \bigwedge_{y \in \boldsymbol{R}} (2x + y < 5)$, 2) $\bigwedge_{y \in \boldsymbol{R}} \bigwedge_{x \in \boldsymbol{R}} (2x + y < 5)$,

3) $\bigwedge_{x \in \boldsymbol{R}} \bigvee_{y \in \boldsymbol{R}} (2x + y < 5)$, 4) $\bigwedge_{y \in \boldsymbol{R}} \bigvee_{x \in \boldsymbol{R}} (2x + y < 5)$,

5) $\bigvee_{x \in \boldsymbol{R}} \bigwedge_{y \in \boldsymbol{R}} (2x + y < 5)$, 6) $\bigvee_{y \in \boldsymbol{R}} \bigwedge_{x \in \boldsymbol{R}} (2x + y < 5)$,

7) $\bigvee_{x \in \boldsymbol{R}} \bigvee_{y \in \boldsymbol{R}} (2x + y < 5)$, 8) $\bigvee_{y \in \boldsymbol{R}} \bigvee_{x \in \boldsymbol{R}} (2x + y < 5)$.

Łatwo zauważyć, że zdania 1) i 2) wyrażają dokładnie to samo. Podobnie jest ze zdaniami 7) i 8). Wśród pozostałych zdań nie ma pary zdań o identycznej treści. Trudniej jest zauważyć, że zdania 1), 2), 5) i 6) są fałszywe. Na przykład zdanie 5) orzeka, że istnieje liczba rzeczywista x taka, że para (x, y) spełnia zawsze nierówność $2x + y < 5$, niezależnie od tego jaką wartość ma y. Jest to oczywiście zdanie fałszywe.

Ćwiczenia

1. Wskaż zdania w następujących wyrażeniach:
   a) W roku 2000 roczny dochód mieszkańca Polski wyniesie średnio 10000\$,
   b) Kiedy się odbyła bitwa pod Grunwaldem?
   c) Mikołaj Kopernik zmarł w piątek,
   d) $3 + 4 - 1$,
   e) kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną.

3. Definicje i twierdzenia

3.1. Definicje

W matematyce, i nie tylko w matematyce, nie powinniśmy się posługiwać wyrażeniami, których znaczenie nie jest nam znane. Aby wyjaśnić komuś znaczenie danego terminu podajemy jego definicję.

Definicja lub inaczej określenie jest wyrażeniem opisującym znaczenie definiowanego terminu za pomocą pojęć już znanych.

Na przykład definicja kwadratu jest odpowiedzią na pytanie, co to jest kwadrat. Odpowiedź ta brzmi: kwadrat jest to prostokąt o bokach równej długości. Aby tę definicję zrozumieć, trzeba znać pojęcia: prostokąt, bok, długość. Zatem pojęcia te muszą być zdefiniowane wcześniej, przed sformułowaniem definicji kwadratu.

Ważną cechą definicji jest to, by pozwalała ona odróżnić definiowany obiekt od innych obiektów, a więc by opisywała definiowany obiekt jednoznacznie.

Na ogół definicja składa się z trzech członów. W pierwszym jej członie występuje wyraz definiowany (sam lub z innymi wyrazami), za pomocą drugiego członu opisujemy ten wyraz, a trzeci człon jest spójnikiem definicyjnym. Spójnikiem jest najczęściej jedno z wyrażeń: "jest to ", "$=$ ", "$\Leftrightarrow$ ".

Na przykład w podanej definicji kwadratu pierwszym członem jest wyraz "kwadrat ", członem definiującym jest "prostokąt o bokach równej długości ", a spójnik definicyjny to wyrażenie "jest to ".

Definicja musi spełniać następujący warunek: w jej członie definiującym nie może występować pojęcie definiowane, ani też pojęcie, które definiuje się za pomocą pojęcia definiowanego. Niespełnienie tego warunku powoduje powstanie tzw. błędnego koła w definiowaniu i taką definicję uznajemy za źle zbudowaną.

Błędne koło mogą tworzyć również dwie definicje; na przykład: "dwie proste prostopadłe to takie proste, które przecinają się pod kątem prostym", "kąt prosty to kąt utworzony przez dwie proste prostopadłe".

Definicja powinna spełniać jeszcze jeden warunek: pojęcia występujące w członie definiującym powinny być znane. Nie można definiować nieznanego przez nieznane.

Dwie definicje tego samego pojęcia nazywamy **definicjami równoważnymi**, jeśli zdanie $q \Leftrightarrow q_1$ jest zdaniem prawdziwym, gdzie q oznacza człon definiujący jednej definicji, q_1 – człon definiujący drugiej.

3.2. Twierdzenia

Twierdzenia w matematyce mają zwykle postać implikacji $p \Rightarrow q$. Twierdzenie takiej postaci składa się z założenia i tezy. **Założeniem** twierdzenia jest zdanie p, **tezą** – zdanie q.

Często bywa tak, że wprawdzie twierdzenie nie ma postaci implikacji, ale można je przeredagować tak, by przybrało tę postać.

Na przykład twierdzenie "przekątne rombu są prostopadłe" nie ma postaci implikacji. Jeżeli jednak sformułujemy je następująco: "jeśli czworokąt jest rombem, to jego przekątne są prostopadłe", to uzyska tę postać.

Rozumowanie, w którym wychodzi się od założeń twierdzenia, wyciąga kolejno wnioski i dochodzi do tezy twierdzenia, nazywa się **dowodem wprost**.

Innym sposobem dowodzenia jest **dowód nie wprost**. Jego podstawą jest następujące prawo rachunku zdań (tzw. **prawo transpozycji**):

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

Z tego prawa wynika, że zamiast dowodzić twierdzenia mającego postać $p \Rightarrow q$, możemy udowodnić twierdzenie postaci $\sim q \Rightarrow \sim p$ i w ten sposób udowodnimy interesujące nas twierdzenie. Przy dowodzeniu nie wprost najpierw zakładamy, że nie jest prawdziwa teza interesującego nas twierdzenia, a następnie staramy się dowieść, że z tego wynika sprzeczność z założeniem danego twierdzenia lub z innymi, udowodnionymi wcześniej, twierdzeniami. Jeśli to się uda, to dowód twierdzenia jest zakończony.

Jako przykład rozważmy następujące twierdzenie: jeśli ułamek $\frac{a}{b}$, gdzie $a, b \in N_+$, jest nieskracalny, to również ułamek $1 - \frac{a}{b}$ jest nieskracalny.

Mamy zatem:

Założenie	Teza
1) $a \in N_+$, $b \in N_+$	ułamek $1 - \frac{a}{b}$
2) ułamek $\frac{a}{b}$ jest nieskracalny	jest nieskracalny

Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Zakładamy więc, że ułamek $1 - \frac{a}{b}$ jest skracalny. Znaczy to, że istnieje liczba naturalna m, $m \neq 0$, $m \neq 1$, przez którą można skrócić ułamek $\frac{b-a}{b}$. Stąd wynika, że m jest wspólnym dzielnikiem liczb $b-a$ oraz b, czyli istnieją takie liczby $k, l \in N_+$, że $b-a = km$ oraz $b = lm$. Wobec tego $(b-a) - b = km - lm$, czyli $-a = (k-l)m$. To zaś znaczy, że liczba m jest także dzielnikiem liczby a. Zatem ułamek $\frac{a}{b}$ można skrócić przez m, co jest sprzeczne z założeniem.
W ten sposób twierdzenie udowodniliśmy.

Niektóre twierdzenia matematyczne dowodzimy wykorzystując **zasadę indukcji zupełnej (matematycznej)**.
Zanim tę zasadę sformułujemy, wprowadzimy najpierw pewne oznaczenia. Niech T oznacza formę zdaniową jednej zmiennej i niech dziedziną T będzie zbiór liczb naturalnych N. Jeśli $a \in N$, to przez $T(a)$ będziemy oznaczali zdanie, które otrzymamy po podstawieniu liczby a w miejsce zmiennej. Niech n_0 będzie ustaloną liczbą naturalną.
Przy przyjętych oznaczeniach zasadę indukcji zupełnej można sformułować następująco: jeśli zdanie $T(n_0)$ jest prawdziwe i dla każdej liczby naturalnej $k \geq n_0$ prawdziwa jest implikacja $T(k) \Rightarrow T(k+1)$, to dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ prawdziwe jest zdanie $T(n)$.

Zwróćmy uwagę, że zasada indukcji ma postać implikacji $p \Rightarrow q$. Jej poprzednik p, będący założeniem zasady indukcji, brzmi: zdanie $T(n_0)$ jest prawdziwe i dla każdej liczby naturalnej $k \geq n_0$ prawdziwa jest implikacja $T(k) \Rightarrow T(k+1)$. Następnik q implikacji, będący tezą zasady indukcji, ma brzmienie: dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ prawdziwe jest zdanie $T(n)$.

Za pomocą zasady indukcji dowodzimy twierdzeń, które (przy przyjętych oznaczeniach) mają postać: "zdanie $\left[\bigwedge_{n \geq n_0} T(n)\right]$ jest prawdziwe ". Chcąc

udowodnić tak sformułowane twierdzenie metodą indukcji, najpierw musimy sprawdzić, czy spełnione jest założenie zasady indukcji. Sprawdzenie to przeprowadzamy w dwóch etapach:

1) sprawdzamy prawdziwość zdania $T(n_0)$,
2) zakładamy, że zdanie $T(k)$ jest prawdziwe i wykazujemy, iż z tego założenia wynika prawdziwość zdania $T(k+1)$.

Jeśli to zrobimy, to na podstawie zasady indukcji możemy twierdzić, że prawdziwe jest zdanie $\bigwedge_{n \geq n_0} T(n)$.

Oto przykład dowodu indukcyjnego następującego twierdzenia:

$$\bigwedge_{n \in N_+} \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right].$$

Twierdzenie to orzeka, że suma kwadratów n kolejnych liczb naturalnych (poczynając od liczby 1) ma postać $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

W tym przypadku $n_0 = 1$, czyli zgodnie z opisaną procedurą sprawdzamy prawdziwość zdania $T(1)$. Sprawdzamy więc, czy $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$. Jest to prawda.

Teraz formułujemy tzw. założenie indukcyjne i tezę indukcyjną:

Założenie

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Teza

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Następnie uzasadniamy, że z założenia wynika teza. Mamy:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2.$$

Wykorzystaliśmy tutaj założenie indukcyjne. Dalej mamy:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} = \frac{(k+1)[2k^2 + 7k + 6]}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Wykazaliśmy zatem, że z założenia indukcyjnego wynika teza, a więc na podstawie zasady indukcji twierdzenie jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej dodatniej.

Rozważmy jeszcze jedno twierdzenie: $\bigwedge_{n \in N} [6|(n^3 - n)]$, gdzie symbol $a|b$ oznacza, że a jest dzielnikiem b.

W tym przypadku $n_0 = 0$. Najpierw sprawdzamy, czy jest prawdą, że $6|(0^3 - 0)$, czyli że $6|0$. Jest to prawda.

Dalej mamy:

Założenie	Teza
$6\|(k^3 - k)$	$6\|[(k+1)^3 - (k+1)]$

Dowód przebiega następująco:

$(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 =$
$= (k^3 - k) + (3k^2 + 3k) = (k^3 - k) + 3k(k+1).$

Liczba $k^3 - k$ dzieli się przez 6 na podstawie założenia. Liczba $3k(k+1)$ też jest podzielna przez 6, bo k i $k+1$ są kolejnymi liczbami naturalnymi, więc jedna z nich musi być parzysta. Zatem suma $(k^3 - k) + 3k(k+1)$ dzieli się przez 6, co należało wykazać.

Ostatecznie, korzystając z zasady indukcji, wnioskujemy, że twierdzenie jest prawdziwe.

Niektóre twierdzenia mają postać równoważności $p \Leftrightarrow q$. Każde twierdzenie tej postaci jest koniunkcją dwóch twierdzeń: twierdzenia prostego $p \Rightarrow q$ i twierdzenia do niego odwrotnego $q \Rightarrow p$. Dowodząc twierdzenie mające postać równoważności musimy udowodnić dwa twierdzenia: proste i odwrotne.

Na przykład twierdzenie "liczba a dzieli się przez 6 $\Leftrightarrow$ a dzieli się przez 2 i a dzieli się przez 3" jest koniunkcją twierdzeń: "jeśli liczba a dzieli się przez 6, to dzieli się przez 2 i dzieli się przez 3" i "jeśli liczba dzieli się przez 2 i dzieli się przez 3, to dzieli się przez 6".

Jeżeli twierdzenie ma postać implikacji $p \Rightarrow q$, to mówimy, że p jest **warunkiem wystarczającym** dla q, a q jest **warunkiem koniecznym** dla p.

W takim razie twierdzenie o podzielności liczby a przez 6 można sformułować tak: warunkiem koniecznym i wystarczającym podzielności liczby a przez 6 jest podzielność tej liczby przez 2 i przez 3.

Dla przykładu rozwiążmy zadanie: podaj kilka warunków wystarczających oraz kilka warunków koniecznych podzielności liczby a przez 12.

Aby rozwiązać pierwszą część zadania musimy znaleźć poprzednik p następującej implikacji: $p \Rightarrow (12|a)$. Tym poprzednikiem może być każde ze zdań: liczba a dzieli się przez 24; liczba a dzieli się przez 36; liczba a dzieli się przez 3 i przez 4.

Rozwiązując drugą część zadania, szukamy następnika q implikacji $(12|a) \Rightarrow q$. Łatwo spostrzec, że szukanym następnikiem może być każde ze zdań: liczba a dzieli się przez 3; liczba a dzieli się przez 4; liczba a dzieli się przez 6.