Wykształcili oni wielu znakomitych uczniów, z których wymienimy tylko kilku: Alfred Tarski, Adolf Lindenbaum, Jerzy Słupecki.

U Łukasiewicza w przypadku logiki trójwartościowej oprócz prawdy i fałszu mamy trzecią wartość – możliwość.

Do nieklasycznych logik należy również logika intuicjonistyczna Brouwera oraz logika modalna Lewisa.

1.2. Funktory zdaniotwórcze

Funktory zdaniotwórcze pozwalają ze zdań prostych tworzyć nowe zdania (złożone). Do oznaczenia funktorów bywają stosowane różne symbole. W poniższym zestawieniu podajemy symbolikę stosowaną w tej książce oraz inne:

$\sim$	funktor negacji	$\neg p$, p', $\bar{p}$, $-p$,
$\vee$	funktor alternatywy (sumy)	$+$, OR,
$\wedge$	funktor koniunkcji (iloczynu)	$\cdot$, &, AND,
$\Rightarrow$	funktor implikacji	$\rightarrow$, $\subset$,
$\Leftrightarrow$	funktor ekwiwalencji	$\leftrightarrow$, $\rightleftarrows$, $\approx$, $\equiv$.

Zdania:

$\sim p$	czytamy:	nieprawda, że p (nie p),
$p \wedge q$	czytamy:	p i q (p oraz q),
$p \vee q$	czytamy:	p lub q (p bądź q),
$p \Rightarrow q$	czytamy:	jeśli p, to q (p pociąga q),
$p \Leftrightarrow q$	czytamy:	p wtedy i tylko wtedy, gdy q (p równoważne q).

Z punktu widzenia klasycznej logiki matematycznej interesuje nas nie treść zdań, lecz ich wartość logiczna. W klasycznej logice funktor jest określony, gdy znając wartości logiczne zdań składowych, określimy wartość logiczną zdania złożonego.

Najważniejsze funktory w klasycznej logice matematycznej podaje następująca tabelka:

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Niech symbol $v(p)$ oznacza wartość logiczną zdania p. W klasycznej logice mamy

$$v(p) = \begin{cases} 1 & \text{(prawda),} \\ 0 & \text{(fałsz).} \end{cases}$$

Wartościowanie klasycznych funktorów wyrażają wzory:

$$\begin{aligned} v(p \vee q) &= \max\{v(p), v(q)\}, \\ v(p \wedge q) &= \min\{v(p), v(q)\}, \\ v(p \Rightarrow q) &= \min\{1, 1+v(q)-v(p)\}, \\ v(\sim p) &= 1-v(p). \end{aligned}$$

Jako ciekawostkę podamy, że w logice Łukasiewicza

$$v(p) = \begin{cases} 2 & \text{(prawda),} \\ 1 & \text{(możliwość),} \\ 0 & \text{(fałsz),} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} v(p \vee q) &= \max\{v(p), v(q)\}, \\ v(p \wedge q) &= \min\{v(p), v(q)\}, \\ v(p \Rightarrow q) &= \min\{2, 2+v(q)-v(p)\}, \\ v(\sim p) &= 2-v(p). \end{aligned}$$

W logice Łukasiewicza mamy dodatkowo jeszcze dwa funktory:
funktor konieczności L – „koniecznie, że”,
funktor możliwości M – „możliwe, że”.
Wartościowanie tych funktorów wyrażają wzory:

$$\begin{aligned} v(Lp) &= \max\{1, v(p)\} \cdot \max\{0, v(p)-1\}, \\ v(Mp) &= \min\{1, v(p)\} \cdot \min\{2, v(p)+1\}. \end{aligned}$$

W implikacji $p \Rightarrow q$ zdanie p nazywamy **poprzednikiem**, a zdanie q **następnikiem**. Mówimy też, że p jest **warunkiem dostatecznym** dla q oraz q jest **warunkiem koniecznym** dla p. Wreszcie, p jest **warunkiem koniecznym i dostatecznym** dla q, jeśli $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Zauważmy, że implikacja jest fałszywa tylko wtedy, gdy jej poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy.

W klasycznej logice jest 16 funktorów dwuargumentowych (poznaliśmy cztery).

Za pomocą zdań i funktorów budujemy elementarne formuły (złożone zdania) rachunku zdań:

$$\sim p, \quad p \wedge q, \quad p \vee q, \quad p \Rightarrow q, \quad p \Leftrightarrow q.$$

Wychodząc od tych formuł i posługując się nawiasami, można budować formuły złożone, np.:

$$\sim (p \wedge q), \quad (\sim (p \Rightarrow q)) \Rightarrow (\sim (p \vee r)), \quad (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim (p \wedge (\sim q))).$$

1.3. Prawa logiki (tautologie)

DEFINICJA 1. Formułę logiczną nazywamy **prawem logicznym** (tautologią), jeżeli jest zdaniem prawdziwym dla wszystkich wartości logicznych zdań, z których jest zbudowana.

A oto kilka ważniejszych tautologii:

$p \vee \sim p$ – prawo wyłączonego środka (*tertium non datur*),

$\sim (p \wedge (\sim p))$ – prawo sprzeczności,

$\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$ – prawo podwójnego przeczenia,

$$\left.\begin{array}{l} \sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q) \\ \sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q) \end{array}\right\} \text{ – prawa de Morgana.}$$

Warto też wyróżnić kilka tautologii odnoszących się do implikacji:

$p \Rightarrow p,$

$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q),$

$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r).$

Niektóre tautologie wykazują analogię z odpowiednimi własnościami działań arytmetycznych:

$$\left.\begin{array}{l} p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p \\ p \vee q \Leftrightarrow q \vee p \end{array}\right\} \text{ – prawa przemienności,}$$

$$\left.\begin{array}{l} p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{array}\right\} \text{ – prawa rozdzielności,}$$

$$\left.\begin{array}{l} p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r \\ p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r \end{array}\right\} \text{ – prawa łączności.}$$

W arytmetyce nie zachodzi rozdzielność dodawania względem mnożenia. Nie są też spełnione arytmetyczne odpowiedniki praw idempotentności:

$$p \wedge p \Leftrightarrow p,$$
$$p \vee p \Leftrightarrow p.$$

Dla przykładu sprawdzimy, że jedno z praw de Morgana jest tautologią.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	c
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Istnieje prosty sposób tworzenia tautologii przez dowolne podstawienie.

PRZYKŁAD 1. Jeżeli w tautologii $p \vee \sim p$ za p podstawimy na przykład zdanie $s \wedge q \Rightarrow r$, to formuła $(s \wedge q \Rightarrow r) \vee \sim (s \wedge q \Rightarrow r)$ też jest tautologią.

Uwaga 2. Ogólnie, jeżeli formuła $A(p_1, \ldots, p_n)$ zbudowana ze zdań $p_1, \ldots, p_n$ jest prawem logicznym, to podstawiając w $A(p_1, \ldots, p_n)$ za $p_1, \ldots, p_n$ formuły $A_1, \ldots, A_n$, otrzymamy formułę, która jest również prawem logicznym.

1.4. Pojęcie reguł dowodzenia

W logice szczególną rolę odgrywają tautologie mające postać implikacji. Jeśli formuła $A \Rightarrow B$ jest tautologią, to powiemy, że formuła B jest logiczną konsekwencją formuły A. O formule $A \Rightarrow B$ mówimy wtedy, że jest regułą dowodzenia. Na przykład tautologia $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ daje regułę dowodzenia zwaną regułą odrywania (*modus ponens*), którą zapisujemy schematycznie

$$\frac{p,\ p \Rightarrow q}{q}.$$

Z prawa sylogizmu $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ dostajemy natychmiast regułę sylogizmu

$$\frac{p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}.$$

Podobnie, prawo kontrapozycji $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ daje regułę kontrapozycji

$$\frac{p \Rightarrow q}{\sim q \Rightarrow \sim p}.$$

Mówimy, że formuła B jest logiczną konsekwencją formuł $A_1, A_2, \ldots, A_n$, jeśli formuła $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$ jest prawem logicznym. Piszemy wtedy:

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}.$$

Zauważmy, że formuła B jest logiczną konsekwencją formuł $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tylko wtedy, gdy dla dowolnych wartości logicznych zdań, z których te formuły są zbudowane, jeśli tylko formuły $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są prawdziwe, to B też jest prawdziwa.

PRZYKŁAD 2.

$$\frac{p \Rightarrow q,\ p \Rightarrow \sim q}{\sim p},$$

zatem:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$p \Rightarrow \sim q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$	$\sim p$	c
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1

(c oznacza tu całą formułę: $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Rightarrow (\sim p)$). ■

Na zakończenie bardzo skrótowo przedstawimy notację beznawiasową Łukasiewicza. Jest ona szczególnie wygodna przy tworzeniu algorytmów komputerowych. Symbole funktorów w wersji nawiasowej zastępuje się odpowiednimi symbolami wersji beznawiasowej według schematu:

Notacja nawiasowa	Notacja beznawiasowa
$\vee$	A
$\wedge$	K
$\Rightarrow$	C
$\sim$	N
$\Leftrightarrow$	E

Jednoznaczność zapisu w wersji beznawiasowej gwarantuje zasada umieszczania funktora głównego na początku formuły.

Przykładowo formuła

$$(\sim(p \Rightarrow q)) \vee (\sim p \wedge q)$$

w wersji beznawiasowej przyjmuje postać

$$ANCpqKNpq.$$

PRZYKŁAD 3. Zapisać w symbolice beznawiasowej formuły:

$((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$ (prawo Pierce'a),
$(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$ (prawo Claviusa),
$\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ (prawo Dunsa-Scota).

Mamy

$$((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p = ((Cpq) \Rightarrow p) \Rightarrow p = (CCpqp) \Rightarrow p = CCCpqpp,$$

$$(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p = (Np \Rightarrow p) \Rightarrow p = (CNpp) \Rightarrow p = CCNppp,$$

$$\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q) = Np \Rightarrow (p \Rightarrow q) = CNp(p \Rightarrow q) = CNpCpq. \quad \blacksquare$$

PRZYKŁAD 4. Zapisać w symbolice nawiasowej formuły: $EKpqNCpNq$, $EKpqNANpNq$, $ECpqANpq$.

Mamy

$$EKpqNCpNq = EKpq \sim (p \Rightarrow \sim q) =$$
$$= E(p \wedge q) \sim (p \Rightarrow \sim q) = (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim (p \Rightarrow \sim q),$$

$$EKpqNANpNq = EKpq \sim (\sim p \vee \sim q) =$$
$$= E(p \wedge q) \sim (\sim p \vee \sim q) = (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee \sim q),$$

$$ECpqANpq = ECpq(\sim p \vee q) = E(p \Rightarrow q)(\sim p \vee q) = (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q). \quad \blacksquare$$

Łatwo udowodnić następujące tautologie

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p),$$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q).$$

Pokażemy, jak można je wykorzystać jako metody dowodowe.

PRZYKŁAD 5. Pokazać, że jeśli liczba naturalna n^2 jest parzysta, to n też jest liczbą parzystą.

Mamy

$$[(n^2 \text{ parzysta}) \Rightarrow (n \text{ parzysta})] \Leftrightarrow [\sim (n \text{ parzysta}) \Rightarrow \sim (n^2 \text{ parzysta})].$$

Ponadto

$$\sim (n \text{ parzysta}) \Rightarrow n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = 4k^2+4k+1 \Rightarrow \sim (n^2 \text{ parzysta}). \quad \blacksquare$$

PRZYKŁAD 6 (dowód nie wprost). Pokazać, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną. Podstawiając w tautologii $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ za q zdanie fałszywe F, dostajemy $(p \Rightarrow F) \Leftrightarrow (\sim p \vee F) \Leftrightarrow \sim p$. Jeżeli przez p oznaczymy zdanie „$\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną", to mamy:

$$[(\sqrt{2} \text{ jest liczbą wymierną}) \Rightarrow F] \Leftrightarrow (\sqrt{2} \text{ jest liczbą niewymierną}).$$

Niech $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$, gdzie $\frac{n}{m}$ jest ułamkiem nieskracalnym. Mamy:

$$\left(\sqrt{2} = \frac{n}{m}\right) \Rightarrow (n^2 = 2m^2) \Rightarrow (n^2 \text{ parzysta}) \Rightarrow (n \text{ parzysta}) \Rightarrow (n = 2k) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2m^2 = 4k^2) \Rightarrow (m^2 = 2k^2) \Rightarrow (m^2 \text{ parzysta}) \Rightarrow (m \text{ parzysta}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m = 2l) \Rightarrow \left(\frac{n}{m} = \frac{2k}{2l}\right) \Rightarrow F$$

(bo ułamek n/m jest nieskracalny). $\blacksquare$

1.5. Predykaty

Predykat (forma zdaniowa) jest to funkcja, której wartościami są zdania. Można też inaczej powiedzieć, że jest to wyrażenie zawierające zmienne i opisujące jakąś własność.

PRZYKŁADY:

7) $3|n$, $n \in Z$ (trzy dzieli n),
8) $x > 1$, $x \in R$,
9) $x+2 = 3$, $x \in R$.

Niech $\phi(x)$ będzie dowolną formą zdaniową. Wówczas zdanie $p = \phi(1) \wedge \wedge \phi(2) \wedge \phi(3)$ jest prawdziwe, gdy prawdziwe są zdania $\phi(1)$, $\phi(2)$, $\phi(3)$. Uogólniając ten przykład, zdanie $q = \phi(1) \wedge \phi(2) \wedge \phi(3) \wedge \ldots = \bigwedge_{i \in N} \phi(i)$ jest prawdziwe, gdy dla **każdego** $i \in N$ jest $\phi(i)$, lub inaczej: jest ono prawdziwe, gdy jest prawdziwy **każdy** jego czynnik.

Ogólnie, zdanie $\bigwedge_{x \in D} \phi(x)$ jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy **dla każdego** elementu $x \in D$ jest prawdziwe zdanie $\phi(x)$.

Analogicznie, zdanie $r = \phi(1) \vee \phi(2) \vee \phi(3)$ jest prawdziwe, gdy jest prawdziwe **co najmniej** jedno ze zdań $\phi(1)$, $\phi(2)$, $\phi(3)$. Uogólniając, zdanie $t = \phi(1) \vee \vee\, \phi(2) \vee \phi(3) \vee \ldots = \bigvee_{i \in N} \phi(i)$ jest prawdziwe, gdy **istnieje** takie $i \in N$, że prawdziwe jest zdanie $\phi(i)$, tj. **istnieje** składnik prawdziwy.

Ogólnie, zdanie $\bigvee_{x \in D} \phi(x)$ jest prawdziwe tylko wtedy, gdy **istnieje** $x \in D$, dla którego $\phi(x)$ jest prawdziwe.

Symbol $\bigwedge_{x \in D}$ nazywamy **kwantyfikatorem ogólnym** (Π, $\forall$), a $\bigvee_{x \in D}$ – **kwantyfikatorem egzystencjalnym** (szczegółowym) (Σ, $\exists$). Zbiór D nazywamy tu zakresem zmienności kwantyfikatora.

1.6. Prawa działań na kwantyfikatorach

Poznane wcześniej prawa de Morgana są prawdziwe dla dowolnej liczby składników (czynników), na przykład dla trzech zdań:

$$\sim (p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q \vee \sim r,$$

$$\sim (p \vee q \vee r) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \wedge \sim r.$$

Dla dowolnego zakresu zmienności:

$$\sim \Big(\bigwedge_{x \in D} \phi(x)\Big) \Leftrightarrow \bigvee_{x \in D} (\sim \phi(x)),$$

$$\sim \Big(\bigvee_{x \in D} \phi(x)\Big) \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in D} (\sim \phi(x)).$$

PRZYKŁADY:

10) $p := \bigwedge_{x \in Z} (2|x \vee 4|x)$,

$$\sim p = \sim \Big(\bigwedge_{x \in Z} (2|x \vee 4|x)\Big) \Leftrightarrow \bigvee_{x \in Z} \sim (2|x \vee 4|x) \Leftrightarrow \bigvee_{x \in Z} 2 \nmid x \wedge 4 \nmid x.$$

11) $q := \bigwedge_{x \in R} \bigvee_{y \in R} (x = y^2)$,

$$\sim q = \sim \Big(\bigwedge_{x \in R} \bigvee_{y \in R} (x = y^2)\Big) \Leftrightarrow \bigvee_{x \in R} \bigwedge_{y \in R} x \neq y^2.$$

12) ciąg a_n jest zbieżny, jeżeli spełniony jest warunek:

$$\bigvee_{g \in R} \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{M} \bigwedge_{n \in N} (n > M \Rightarrow |a_n - g| < \varepsilon).$$

Natomiast a_n nie jest zbieżny, jeżeli spełniony jest warunek:

$$\bigwedge_{g \in R} \bigvee_{\varepsilon > 0} \bigwedge_{M} \bigvee_{n \in N} (n > M \wedge |a_n - g| \geqslant \varepsilon).$$

PRZYKŁAD 13. W trzech bankach jest łącznie 7,5 bln zł. Pokazać, że istnieje bank, w którym jest co najmniej 2,5 bln zł.

Dowód (porównaj z przykładem 6). Niech $S(i)$ oznacza (wyrażoną w bln zł) ilość pieniędzy w banku i, $i = 1, 2, 3$. Przypuśćmy nie wprost, że $\big(\bigwedge_i S(i) < 2{,}5\big)$. Stąd $S(1) + S(2) + S(3) < 7{,}5$, co przeczy założeniu. A zatem z prawa de Morgana $\bigvee_i S(i) \geqslant 2{,}5$, ■

Nie można bezkarnie zmieniać kolejności występowania różnych kwantyfikatorów.

PRZYKŁADY:

14) $\bigvee_{x \in R} \bigwedge_{y \in R} (x < y)$ – zdanie fałszywe,

$\bigwedge_{y \in R} \bigvee_{x \in R} (x < y)$ – zdanie prawdziwe.

Stąd zachodzi implikacja

$$\bigvee_{x \in R} \bigwedge_{y \in R} (x < y) \Rightarrow \bigwedge_{y \in R} \bigvee_{x \in R} (x < y). \quad ■$$

15) Ciągłość funkcji:

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigwedge_{x_0 \in D} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in D} (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon),$$

ciągłość jednostajna funkcji:

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x_0 \in D} \bigwedge_{x \in D} (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Widać stąd, że ciągłość jednostajna implikuje ciągłość. ■

Ogólnie, prawdziwa jest implikacja:

$$\bigvee_{x \in X} \bigwedge_{y \in Y} \Phi(x, y) \Rightarrow \bigwedge_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} \Phi(x, y).$$

W przypadku kwantyfikatorów jednego rodzaju kolejność nie jest istotna, gdyż prawdziwe są poniższe równoważności:

$$\bigvee_{x \in X} \bigvee_{y \in Y} \Phi(x, y) \Leftrightarrow \bigvee_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} \Phi(x, y).$$

$$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in Y} \Phi(x, y) \Leftrightarrow \bigwedge_{y \in Y} \bigwedge_{x \in X} \Phi(x, y).$$

1.7. Zadania

1. Która z następujących formuł logicznych jest tautologią?

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$, $\quad [p \Rightarrow (\sim p \wedge q)] \Rightarrow q$, $\quad \sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$,

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$, $\quad p \vee [(p \wedge r) \Rightarrow (\sim q \vee \sim r)]$.