
Lista 9: Całki wymierne i całki oznaczone

Matematyka dla chemii ogólnej, 2016

1. Obliczyć następujące całki nieoznaczone, stosując rozkład na ułamki proste:

$$(1) \int \frac{1}{x^2 - 1} dx, \quad (2) \int \frac{1}{x^2 + x - 6} dx, \quad (3) \int \frac{1}{x(1+x)^2} dx,$$
$$(4) \int \frac{3x - 1}{x^2 + 2x + 8} dx, \quad (5) \int \frac{x^2}{x^2 + 2} dx, \quad (6) \int \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 - x + 2} dx,$$
$$(6) \int \frac{1}{x^3 - 1} dx, \quad (7) \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx, \quad (8) \int \frac{x^4}{x^4 - 1} dx.$$

2. Wybierając samodzielnie metodę całkowania, obliczyć następujące całki nieoznaczone:

$$(1) \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx, \quad (2) \int \frac{\sin^3 x}{1 + 2 \cos x} dx, \quad (3) \int \frac{x}{x^4 + 1} dx, \quad (4) \int \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} dx,$$
$$(5) \int x^5 e^{x^3} dx \quad (6) \int \arcsin x dx, \quad (7) \int \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx, \quad (8) \int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx.$$

3. Obliczyć całki oznaczone:

$$(1) \int_1^3 2x^3 dx, \quad (2) \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \quad (3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx, \quad (4) \int_1^4 \ln x dx, \quad (5) \int_0^2 x e^{x^2} dx,$$

4. Obliczyć całki niewłaściwe lub stwierdzić ich rozbieżność:

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}, \quad (2) \int_0^{+\infty} e^{-x} dx, \quad (3) \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad (4) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2(2x)}, \quad (5) \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{x dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$$

5. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi:

$$(1) y = x^2, y = 2x + 3; \quad (2) y = x^4, y = 2 - x^2; \quad (3) y = x - \ln x, y = 0, x = 1 \text{ i } x = e.$$

6. Długość L krzywej będącej wykresem funkcji f na przedziale $[a, b]$ jest dana wzorem

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \text{ Znaleźć długość wykresu funkcji } f(x) = x^3 + \frac{1}{12x} \text{ na przedziale } [1, 3].$$

7. Objętość bryły obrotowej, powstałej w wyniku obrotu wokół osi OX wykresu funkcji f na przedziale $x \in [a, b]$ wyraża się wzorem $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$. Obliczyć objętość brył powstałych przez obrót wokół osi OX funkcji

$$(1) f(x) = \cos x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]; \quad (2) f(x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1, 1]; \quad (3) f(x) = \ln x, x \in [1, 3].$$

8. Ciało porusza się po prostej, a jego prędkość w chwili t wynosi $v = 3t^2$. Oblicz drogę przebytą przez to ciało w drugiej i czwartej sekundzie ruchu (czyli od $t = 1$ do $t = 2$ i od $t = 3$ do $t = 4$).

9. Dwa mole gazu doskonałego zostały ściśnięte do połowy swojej początkowej objętości w stałej temperaturze 300K. Jaka praca została wykonana nad gazem, jeśli jest ona dana wzorem

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P dV,$$

a V_1 i V_2 oznaczają odpowiednio objętość początkową i końcową.