

---

## Lista 7: Pochodne

Matematyka dla chemii ogólnej, 2016

---

1. Obliczyć z definicji pochodną funkcji (a)  $f(x) = \cos x$ , (b)  $f(x) = \frac{1}{x}$ , (c)  $f(x) = a^x$  ( $a$  – stała).
2. Sprawdzić z definicji, czy funkcja  $f(x) = |x - 3|$  ma pochodną w punkcie  $x = 3$ .
3. Pokazać, że pochodna funkcji parzystej jest nieparzysta. Obliczyć  $f'(2)$ , jeśli wiadomo, że  $f$  jest parzysta i  $f'(-2) = 7$ .
4. Obliczyć pochodne

$$x^2 e^{3x^2-1}; \quad \frac{2x^2}{\sqrt{3+x^2}}; \quad 7^{x^3+x}; \quad \ln\left(\frac{7+x}{2-x}\right); \quad \operatorname{arctg}(x^2+4x); \quad \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

5. Korzystając z twierdzenia de l'Hospitala, obliczyć granice:  
a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ , b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x}$ , c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{\operatorname{tg} x}$ , d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin x - \cos x}$ .
6. Zbadać przebieg wykresu funkcji (wyznaczyć dziedzinę, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne, granice na końcach dziedziny, asymptoty) i naszkicować wykres.  
a)  $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$ , b)  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ , c)  $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ .
7. Uzasadnić, że dla  $x \geq 1$  prawdziwa jest nierówność  $x^4 - 4x + 3 > 0$ .  
Wskazówka: Zbadać wartość funkcji  $f(x) = x^4 - 4x + 3$  w punkcie  $x_0 = 1$  oraz jej monotoniczność.
8. Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  w punkcie  $(0, -1)$ .
9. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji  $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$  na przedziale  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .
10. Pocisk wystrzelony pod kątem  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , z prędkością początkową  $v_0$  osiąga odległość

$$R(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha),$$

gdzie  $g = 9,8 \frac{m}{s^2}$  jest przyspieszeniem ziemskim. Znaleźć kąt, przy którym zasięg będzie największy.

11. Potencjał Lennarda-Jonesa  $U(R)$  opisuje interakcję między dwoma cząstkami bez ładunku. Jeśli cząstki są odległe od siebie o  $R$ , to

$$U(R) = \frac{A}{R^{12}} - \frac{B}{R^6},$$

gdzie  $A$  i  $B$  są stałymi. W stanie równowagi, czyli w odległości  $R_e$ , energia wiązania jest najmniejsza i wynosi  $E = -U(R)$ . Jaka odległość między cząstkami odpowiada stanowi równowagi?

12. Teleskop Hubble został wyniesiony na orbitę 24 kwietnia 1990 roku przez prom kosmiczny Discovery. Matematyczny model prędkości promu wyrażonej w stopach na sekundę od momentu wyjścia z wieży startowej ( $t = 7$ ) do wyrzucenia pierwszej rakiety wspomagającej ( $t = 126s$ ) jest dany wzorem

$$v(t) = 0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083.$$

Oszacować maksymalne i minimalne **przyspieszenie** promu między startem a wyrzutem rakiety. Jaka była prędkość w promu w tych dwóch momentach?