Lista 6: Granice i ciagłość funkcji

Matematyka dla chemii ogólnej, 2016

1. Obliczyć granice funkcji:
   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-4}{x+2}$, b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-4}{x+2}$, c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$, d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x-2}{x^2-4}$,
   e) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+1}{x+1}$, f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2^x+3^x}{2^x+4^x}$, g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^7+3x^3-x}{4x^2-5}$, h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{4x}$,
   i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-1}{\sin^2 x}$, j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$, k) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{2x}$, l) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{x+1}$.

2. Obliczyć granice funkcji:
   a) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1})$,
   b) $\lim\limits_{x\to 3} \left[\ln(x^2-5x+6) - \ln(x-3)\right]$,
   c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\ln(x+6) - \ln(4x-1)\right]$,

3. Korzystając z oszacowań na funkcje sinus i cosinus, obliczyć

$$(a)\ \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x^2}, \qquad (b)\ \lim_{x\to 1} \ln x \cdot \sin x, \qquad (c)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sin x}{x}.$$

4. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$.
   Wskazówka: Korzystając z podstawienia $y = e^x - 1$, pokazać, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\ln(y+1)^{\frac{1}{y}}}.$$

5. Uzasadnić, że nie istnieją granice:
   a) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$, b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x}{3-x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$.

6. Sprawdzić, dla których z podanych funkcji f można określić $f(a)$ tak, aby f była ciągła w a:
   a) $f(x) = \dfrac{1-\cos 3x}{x}$, $a = 0$ b) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-8}{x-2}$, $a = 2$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 0$.

7. Uzasadnić, że podany wielomian $p(x)$ ma pierwiastek rzeczywisty i znaleźć jego przybliżenie z dokładnością $d = 0,1$:
   a) $p(x) = x^3 - x^2 + 1$, b) $p(x) = x^5 + x^3 + x^2 - 1$, c) $p(x) = 4x^4 - x^3 - 2$.

8. Korzystając z równania $x^2 - 5 = 0$, wyznaczyć pierwszą cyfrę rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{5}$.

9. Wykazać, że równanie $x^3+x = 3$ ma co najmniej jedno rozwiązanie i wyznaczyć jego przybliżoną wartość z dokładnością do $d = 0,1$.

10. Znaleźć asymptoty funkcji:
    a) $f(x) = \dfrac{x^2-x-1}{2x}$, b) $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+3x+2}$, c) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$, d) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.
    Wskazówka: W przykładzie d) skorzystać z zadania 4.