
Lista 5: Ciągi i ich granice
Matematyka dla chemii ogólnej, 2016

- Znaleźć (a) największy wyraz ciągu $a_n = \frac{3^n}{n!}$, (b) najmniejszy wyraz ciągu $b_n = n^3 - 5n$.
- Podać przykłady ciągów świadczące o tym, że wyrażenia $\infty - \infty$, 1^∞ oraz 0^0 są nieoznaczone.
- Obliczyć granice

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 3n^3 + 1}{(n^3 - 1)(n + 2)}$,	2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n}}{n - \sqrt{n}}$,	3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4}}{3n - 2}$,
4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(n^5)}{\log_8 n}$,	5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - n^3}{2n}$,	6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^{n+1} + 2^{2n}}{(-5)^{n-1} + 7}$,
7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + n^3 + 70}$,	8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n^2 + \frac{2}{n}}$,	9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{n^2 + 1}{n} \right)$,
10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{2n}$,	11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n^2}$,	12) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{-\frac{n+1}{3}}$,
13) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 5n)$,	14) $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^{\frac{n^2+7}{3n-1}}$,	15) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n^2 + 2n} - n\sqrt{3})$.

- Jeśli ciąg $(a_n)_n$ o wyrazach dodatnich ma granicę niewłaściwą $+\infty$ (lub ma wyrazy ujemne i granicę $-\infty$), to

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Korzystając z tej własności (o ile to możliwe) obliczyć granice:

$$16) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{4n}, \quad 17) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{n-1}, \quad 18) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n^2}\right)^{7 + \frac{1}{n^2}}, \quad 19) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+1}.$$

- Wybierając odpowiednie podciągi uzasadnić, że podane granice nie istnieją:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} [3^n + (-3)^n]$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} n$.