

---

## Lista 4: Funkcje wykładnicza i logarytmiczna

Matematyka dla chemii ogólnej, 2016

---

1. Uprościć wyrażenia:

$$e^{-4 \ln x}, \quad \ln(e^{\ln e}), \quad \log_{\sqrt{3}} 8 \cdot \log_4 81, \quad 49^{\log_7 2}, \quad \ln(x^4 - 4x^2) + 3 \ln(x^{-1}) - \ln(x^2 - 4).$$

2. Rozwiązać równanie lub nierówność. W każdym przypadku wypisać dziedzinę.

$$\text{a) } \frac{1}{128} \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^{-x} \quad \text{b) } \left(\frac{3}{2}\right)^{2-2x} - \left(\frac{8}{27}\right)^{x-2} = 0 \quad \text{c) } \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} > 9 \cdot 3^{2x-1}$$

$$\text{d) } \log_3(5x+2) - \log_3(8-x) = 2 \quad \text{e) } \frac{1}{5 - \log x} + \frac{2}{1 + \log(x^3)} = 1 \quad \text{f) } \log_x(x^2 - 1) = 4$$

$$\text{g) } \log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3 \quad \text{h) } \log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} < 1 \quad \text{i) } |\log(10x^2) - 1| < 2$$

3. Wyznaczyć dziedziny funkcji:

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{\log(x^2-3)} + \sqrt{9-3x} \quad \text{b) } f(x) = \log_{\frac{1}{4}} \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} x$$

4. Naszkicować wykresy funkcji

$$\text{(a) } 1 + 3^{-x}, \quad \text{(b) } \log_{\frac{1}{2}} |x|, \quad \text{(c) } \ln(1-x), \quad \text{(d) } |\log_2 x|.$$

5. Ciśnienie gazu na wysokości  $h$  powyżej poziomu morza można obliczyć za pomocą równania barometrycznego

$$p = p_0 e^{-Mgh/RT},$$

gdzie  $M$  jest masą molową gazu,  $p_0$  - ciśnieniem na poziomie morza, a  $g$ ,  $T$  i  $R$  są stałymi. Wyrazić  $h$  za pomocą pozostałych zmiennych.

6. Intensywność fali dźwiękowej o częstotliwości 1000 Hz na progu słyszalności wynosi  $I_0 = 10^{-16} \text{ W/cm}^2$ . Jeśli  $x$  oznacza intensywność fali dźwiękowej, to poziom głośności definiujemy jako

$$L(x) = 10 \log \frac{x}{I_0}$$

i wyrażamy w *decybelach* (choć jest to wielkość bezwymiarowa).

(a) Podać poziom głośności odpowiadający intensywnościom  $10^{-12}$  (szmer liści),  $10^{-2}$  (kosiarstwo) i 10 (młot pneumatyczny).

(b) Jaka jest różnica między poziomami głośności dwóch dźwięków, z których jeden jest 1000 razy bardziej intensywny od drugiego?

(c) Jaki jest stosunek intensywności szeptu (poziom głośności 30 dB) do głośnej muzyki (poziom głośności 80 dB)?

(d) Jaki jest stosunek intensywności danego dźwięku do drugiego, większego o 100 dB?

7. Chora komórka wprowadzona do organizmu myszy podwaja się po 12 godzinach. Po kolejnych 12 godzinach te dwie komórki dzielą się na cztery. To podwajanie trwa do momentu, gdy liczba chorych komórek przekroczy miliard – wtedy mysz umiera.

(a) Napisać równanie na liczbę chorych komórek po  $t$  dobach.

(b) Ile dni żyje mysz od momentu zakażenia?

8. pH roztworu wodnego jest dane wzorem  $pH = -\log[H^+]$ , gdzie  $[H^+]$  to stężenie kationów wodorowych podane w jednostkach  $\frac{mol}{dm^3}$ . Oszacować liczbę moli kationów wodorowych w 2,5 litra roztworu, jeśli wiadomo, że pH roztworu waha się między 8 a 9.

9. Podać wzory funkcji złożonych  $f \circ g$  i  $g \circ f$  oraz wyznaczyć ich dziedziny, gdy:

(a)  $f(x) = 2x - x^2, g(x) = 4 \ln x - 5$ ; (b)  $f(x) = x^2, g(x) = 2^x + 1$ ; (c)  $f(x) = g(x) = \frac{1}{1-x}$ .

10. Dla podanych funkcji  $h$  znaleźć funkcje zewnętrzną  $f$  i wewnętrzną  $g$ , tzn. takie że  $h = f \circ g$ :

(a)  $h(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ , (b)  $h(x) = |-5x+1|$ , (c)  $h(x) = \frac{1}{\operatorname{ctg} x + 1}$ , (d)  $h(x) = \log(\sin x)$ .