Lista 11: Macierze, wektory, liczby zespolone
Matematyka dla chemii ogólnej, 2016

1. Obliczyć

a) $2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ b) $-3\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^T + 3\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{bmatrix}^T$

2. Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Sprawdzić, czy wykonalne są następujące działania i jeśli tak to wykonać, je.

(a1) $2A + C$, (a2) $(A - B)C$, (a3) $C^T D$, (a4) ACD^T.

(b) Sprawdzić, czy zachodzą równości:

(b1) $AB = BA$ (b2) $(C^T)^T = C$ (b3) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

(c) O ile to możliwe, obliczyć wyznaczniki macierzy.

(d) Sprawdzić, czy $\det(A + B) = \det A + \det B$.

3. Za pomocą wzorów Cramera rozwiązać układy równań

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ x + 2y + 2z = 5 \\ 3x + 5y + 2z = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y - z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 3 \\ x + z = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

4. Niech $\vec{v} = (1, 1, 1)$, $\vec{w} = (-1, 0, 1)$. Obliczyć $\vec{v} + \vec{w}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$, $|2\vec{v} - \vec{w}|$.

5. Wyznaczyć stałą λ, dla której wektory $\vec{v} = (\lambda, 1, 3)$ i $\vec{w} = (-1, 2, 3)$ są prostopadłe.

6. Wyznaczyć wektor jednostkowy $\vec{v}$ w $\mathbb{R}^2$ prostopadły do wektora $\vec{u} = (3, -5)$.

7. Zapisać podane liczby w postaci $a + bi$.
a) $(2 - 3i) + (1 + 3i)$ b) $3(4 + 7i) - (2 + i)$ c) $(5 + 3i)(3 - i)$
d) $(1 + i)^2$ e) $\dfrac{1 - i}{1 + i}$ f) $\dfrac{1}{4 + 3i}$

8. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone spełniające równanie:
a) $z^2 + z + 3 = 0$ b) $2z + (1 - i)\bar{z} = 1 + 3i$ c) $\mathrm{Re} z - 3iz = 2$

9. Obliczyć moduły liczb: $z = -i$, $z = 1 - 3i$, $z = -5 - 12i$, $z = \frac{1-i}{1+i}$.

10. Liczbę z przedstawić w postaci trygonometrycznej i, korzystając ze wzoru de Moivra, wyznaczyć n-tą potęgę: a) $z = 1 + i$, $n = 2$, b) $z = 2i$, $n = 3$, c) $z = 1 - i\sqrt{3}$, $n = 4$.

11. Narysować na płaszczyźnie zbiór liczb zespolonych spełniających równanie

    a) $1 < |z| < 2$ b) $|z + i| = 1$ c) $|z + 1| = |z - 2i|$ d) $|z - \bar{z}| = 2$ e) Arg $z \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$.

    Wskazówka: $|z - w|$ jest odległością liczb zespolonych z i w.

12. Pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby zespolonej $w = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ nazywamy liczbę spełniajaca równanie $z^n = w$. Liczba zespolona w posiada n pierwiastków n-tego stopnia i są one dane wzorem:

$$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\alpha_k + i\sin\alpha_k),\ \alpha_k = \alpha + \frac{2\pi k}{n},\ \text{gdzie } k = 0, 1, n-1.$$

    Wyznaczyć i zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej pierwiastki trzeciego i czwartego stopnia z liczby $z = 1$.