Lista 10: Równania różniczkowe

Matematyka dla chemii ogólnej, 2016

1. Sprawdzić, czy (lub dla jakich stałych) poniższe funkcje są rozwiązaniami podanych równań różniczkowych:

   (a) $y(x) = \ln x$, $y' = e^{-y}$, (b) $y(x) = Ce^{-2x}$, $y' + 2y = 0$, (c) $y(x) = x^2 + C$, $xy' = 2y$.

2. Równaniem różniczkowym *o rozdzielonych zmiennych* nazywamy równanie, które można zapisać w postaci

$$y' = g(x)h(y) \quad \text{lub równoważnie} \quad \frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{R}$$

   Równanie takie ma dwa typy rozwiązań:

   (a) jeśli dla pewnego y_0 zachodzi $h(y_0) = 0$, to $y(x) = y_0$ jest rozwiązaniem równania.

   (b) jeśli g i h są ciągłe i $h(y) \neq 0$ dla każdego y, to możemy przekształcić równanie różniczkowe do postaci

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$

   i jego rozwiązanie jest postaci $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C$, gdzie C jest dowolna stałą rzeczywistą.

   W poniższych przykładach wskazać funkcje g i h. Metodą rozdzielonych zmiennych rozwiązać równania różniczkowe, a następnie uwzględnić warunek początkowy $y(0) = 0$:

   (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{y}$, (b) $xy' + y^2 = 1$, (c) $y' \sin x = y \cos x$, (d) $\frac{dy}{dx} = e^{2x-y}$.

3. Równaniem różniczkowym *jednorodnym* nazywamy równanie, które można zapisać w postaci

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{J}$$

   Zakładamy, że $g(u) \not\equiv u$ (w przeciwnym przypadku, jeśli $g(u) = u$ dla wszystkich u, równanie rozwiązujemy metodą rozdzielonych zmiennych). Równanie (J) ma dwa typy rozwiązań:

   (a) jeśli dla pewnego u_0 zachodzi $g(u_0) = u_0$, to jednym z rozwiązań jest $y(x) = u_0 \cdot x$.

   (b) przez podstawienie $u(x) = \frac{y}{x}$ przekształacamy równanie do równania o rozdzielonych zmiennych, bo wtedy $y(x) = xu(x)$ i $\frac{dy}{dx} = u(x) + x\frac{du}{dx}$. Dostajemy zatem równanie

$$\frac{du}{dx} = \frac{g(u) - u}{x}.$$

   Stosując powyższe podstawienie przekształcić podane równania różniczkowe i rozwiązać je:

   (a) $xy' = x + y$, (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$, (c) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$, (d) $y' = y + xe^{\frac{y}{x}}$.

4. Równaniem różniczkowym *liniowym* nazywamy równanie, które można zapisać w postaci

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + B(x). \tag{L}$$

(a) gdy $B(x) \equiv 0$, równanie nazywamy równaniem *liniowym jednorodnym* i rozwiązujemy metodą rozdzielonych zmiennych. Dokładniej,

$$\int \frac{dy}{y} = \int A(x)dx + \tilde{C}, \quad \text{czyli} \quad y = Ce^{\int A(x)dx}.$$

(b) gdy $B(x) \not\equiv 0$, to mówimy, że (L) jest równaniem *liniowym niejednorodnym*. Stosujemy wtedy metodę uzmienniania stałej, która wymaga dwóch kroków:

KROK 1: rozwiązujemy równanie jednorodne $y' = A(x)y$, otrzymując rozwiązanie postaci $y = Ce^{F(x)}$, gdzie $F(x) = \int A(x)dx$, a C jest dowolną stałą rzeczywistą.

KROK 2: przyjmujemy, że stała C w powyższym rozwiązaniu jest funkcją $C = C(x)$ i rozwiązanie $y = C(x)e^{F(x)}$ wstawiamy do równania niejednorodnego $y' = A(x)y + B(x)$:

$$C'(x)e^{F(x)} + C(x)F'(x)e^{F(x)} = A(x)C(x)e^{F(x)} + B(x).$$

Po uproszczeniu dostajemy równanie o rozdzielonych zmiennych

$$C'(x)e^{F(x)} = B(x), \quad \text{czyli} \quad \frac{dC}{dx} = B(x)e^{-F(x)}.$$

Rozwiązać następujące równania liniowe jednorodne i niejednorodne. Wyznaczyć funkcje $A(x)$ i $B(x)$.

(a) $y' = 4xy$, (b) $xy' + 2y = 0$, (c) $y' + 3y = 0$, (d) $y' + y = 0$,
(a') $y' = 4xy + x$, (b') $xy' + 2y = x$, (c') $y' + 3y = e^{-3x}$, (d') $y' + y = x^2$.

5. Wiadomo, że szybkość zmian temperatury $T(t)$ danego ciała jest proporcjonalna do różnicy między temperaturą tego ciała i temperaturą otoczenia (prawo Newtona). Załóżmy, że w momencie 0 ciało miało temperaturę $T(0) = 100°C$ w temperaturze otoczenia 20°C. Po dziesięciu minutach temperatura ciała wynosiła 60°C. Po ilu minutach temperatura ciała wyniesie 25°C?

6. Odwracalna reakcja chemiczna I rzędu $A \rightleftharpoons B$ opisywana jest równaniem kinetycznym

$$\frac{dx}{dt} = k_1(x - a)k_{-1}x,$$

dla stężenia poczatkowego $[A]_0 = a$ i stężenia $[A] = x - a$ po czasie t. Wielkości k_1 i k_{-1} są stałymi szybkości reakcji $A \to B$ i $B \to A$, odpowiednio. Wyznaczyć $x(t)$ dla warunku poczatkowego $x(0) = 0$.