KOLOKWIUM 2 – ROZWIĄZANIA – GRUPA A

Matematyka dla chemii ogólnej, 15.12.2016

1. Ocenić wartość logiczną poniższych zdań (prawda/fałsz). Odpowiedź uzasadnić (powołać się na twierdzenie lub własność z wykładu lub podać kontrprzykład).

   (a) Funkcja $f(x) = \ln(x^2+1)$ jest ciągła na $\mathbb{R}$.

   PRAWDA. Funkcja f jest złożeniem $g \circ h$ funkcji $g(x) = \ln x$ oraz funkcji $h(x) = x^2 + 1$. Obie są ciągłe na swoich dziedzinach, więc ich złożenie także jest ciągłe na swojej dziedzinie, którą jest $\mathbb{R}$ (bo $x^2+1>0$).

   (b) Równanie $x^8 + \sqrt{x+3} - 2 = 0$ ma przynajmniej jeden pierwiastek w przedziale $(0,1)$.

   PRAWDA. Funkcja $f(x) = x^8 + \sqrt{x+3} - 2$ jest ciągła i przyjmuje wartości przeciwnych znaków na końcu przedziału $[0,1]$: $f(0) = -2 < 0$, $f(1) = 1 > 0$. Na mocy własności Darboux w przedziale $(0,1)$ istnieje przynajmniej jedno miejsce zerowe f, czyli punkt x_0 taki, że $f(x_0) = 0$. Jest on pierwiastkiem równania $x^8 + \sqrt{x+3} - 2 = 0$.

   (c) Każda funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest (a) różniczkowalna, (b) ciągła.

   (a) NIEPRAWDA. Funkcja jest różniczkowalna, jeśli nie ma "kantów" ani "dzióbków". Łatwo wyobrazić sobie taką funkcję na $\mathbb{R}$, która ma kant lub dzióbek, i w tym punkcie nie jest różniczkowalna; np.

   $$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

   (b) NIEPRAWDA. Funkcja jest ciągła na przedziale, jeśli można ją narysować jednym pociągnięciem ołówka. W naszym przypadku rozważamy przedział $(-\infty, +\infty)$. Łatwo wyobrazić sobie funkcję, której nie da się narysować w ten sposób; np.

   $$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

   (d) Jeśli $f'(x_0) = 0$, to funkcja f ma w x_0 (a) maksimum, (b) minimum.

   NIEPRAWDA. Jeśli $f'(x_0) = 0$, to f może mieć w x_0 maksimum, minimum lub punkt przegięcia.

   (a) Niech $f(x) = x^2$. Wtedy w $x_0 = 0$ mamy $f'(x_0) = 2x_0 = 0$, ale jest tam minimum.

   (b) Niech $f(x) = -x^2$. Wtedy w $x_0 = 0$ mamy $f'(x_0) = -2x_0 = 0$, ale jest tam maksimum.

2. Obliczyć granice

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2n-\sqrt{4n^2+3n}\right)$,

(b) $\lim\limits_{x\to 3^+}\left[\ln(x^2-4x+3)-\ln(x-3)\right]$.

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)}\ \lim_{n\to+\infty}\left(2n-\sqrt{4n^2+3n}\right)=[\infty-\infty]\\
&=\lim_{n\to+\infty}\left(2n-\sqrt{4n^2+3n}\right)\cdot\frac{2n+\sqrt{4n^2+3n}}{2n+\sqrt{4n^2+3n}}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)^2-(\sqrt{4n^2+3n})^2}{2n+\sqrt{4n^2+3n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2-(4n^2+3n)}{2n+\sqrt{4n^2+3n}}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{-3n}{2n+\sqrt{4n^2+3n}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-3}{2+\sqrt{4+3\frac{1}{n}}}=-\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Podana granica prowadzi do wyrażenia nieoznaczonego $[\infty-\infty]$, więc musimy ją przekształcić. Stosujemy do tego mnożenie przez wyrażenie sprzężone, a następnie dzielenie licznika i mianownika przez najwyższą potęgę n w mianowniku.

$$
\begin{aligned}
&\text{(b)}\ \lim_{x\to3^+}\left[\ln(x^2-4x+3)-\ln(x-3)\right]=[\infty-\infty]=\lim_{x\to3^+}\ln\frac{x^2-4x+3}{x-3}\\
&=\lim_{x\to3^+}\ln\frac{(x-3)(x-1)}{x-3}=\lim_{x\to3^+}\ln(x-1)=\ln(3-1)=\ln 2.
\end{aligned}
$$

Podana granica prowadzi do wyrażenia nieoznaczonego $[\ln 0-\ln 0]=[\infty-\infty]$, więc musimy ją przekształcić. Korzystamy z włanośći logarytmu $\ln x-\ln y=\ln\frac{x}{y}$, a następnie zauważamy, że wielomian kwadratowy z licznika można zapisać jako $(x-3)(x-1)$.

3. Obliczyć (i uprościć o ile to możliwe) pochodne:

   (a) $(e^x \cos x + \sin x - 12)'$,

   (b) $\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)\right]'$.

W przykładzie (a) korzystamy ze wzorów na pochodną sumy (to suma pochodnych), pochodną iloczynu dwóch funckji: $(fg)' = f'g + fg'$ oraz faktu, że pochodna funkcji stałej jest równa 0.

$$\begin{aligned}
(e^x \cos x + \sin x - 12)' &= (e^x \cos x)' + (\sin x)' + (-12)' \\
&= (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)' + (\sin x)' + (-12)' \\
&= e^x \cos x + e^x(-\sin x) + \cos x + 0 \\
&= e^x(\cos x - \sin x) + \cos x
\end{aligned}$$

W przykładzie (b) korzystamy ze wzoru na pochodną funkcji złożonej $(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$, wzoru na pochodną ilorazu $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g + fg'}{g^2}$ oraz pochodnej arctg.

$$\begin{aligned}
\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)\right]' &= \frac{1}{\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2 + 1} \cdot \left(\frac{x+3}{x-1}\right)' \\
&= \frac{1}{\frac{(x+3)^2}{(x-1)^2} + \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2}} \cdot \frac{(x+3)'(x-1) - (x+3)(x-1)'}{(x-1)^2} \\
&= \frac{(x-1)^2}{(x+3)^2 + (x-1)^2} \cdot \frac{(x-1) - (x+3)}{(x-1)^2} = \frac{-4}{2x^2 + 4x + 10} \\
&= \frac{-2}{x^2 + 2x + 5}
\end{aligned}$$

4. Zbadać przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = \frac{x^2-5}{x-3}.$$

Wyznaczyć dziedzinę, własności globalne, asymptoty, przedziały monotoniczności i ekstrema. Naszkicować wykres.

(a) dziedzina: w mianowniku nie może być zera, czyli $x-3 \neq 0$. Stąd $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$;

(b) miejsce zerowe: $x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{5}$ lub $x = \sqrt{5}$;

(c) ciągłość: na całej dziedzinie; nasza funkcja jest funkcją wymierna, a każda funkcja wymierna jest ciągła w swojej dziedzinie;

(d) różniczkowalność: na całej dziedzinie: nasza funkcja jest funkcją wymierna, a każda funkcja wymierna jest różniczkowalna w swojej dziedzinie;

$$f'(x) = \Big(\frac{x^2-5}{x-3}\Big)' = \frac{(x^2-5)'(x-3)-(x^2-5)(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$$

(e) parzystość: dziedzina funkcji nie jest symetryczna ($x = -3 \in D$, ale $-x = 3 \notin D$), więc funkcja nie jest ani parzysta ani nieparzysta;

(f) asymptota pionowa: badamy granice prawo- i lewostronną w punkcie $x=3$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-5}{x-3} = \Big[\frac{1}{0^+}\Big] = +\infty; \quad \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-5}{x-3} = \Big[\frac{1}{0^-}\Big] = -\infty,$$

zatem $x=3$ jest asymptotą pionową obustronną

(g) asymptota pionowa/ukośna: badamy granice w $+\infty$ (analogicznie dla $-\infty$)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-5}{x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\frac{5}{x}}{1-\frac{3}{x}} = \Big[\frac{+\infty}{1}\Big] = +\infty;\\
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-5}{x(x-3)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{5}{x^2}}{1-\frac{3}{x}} = 1 =: a;\\
\lim_{x\to+\infty} (f(x)-ax) &= \lim_{x\to+\infty} \Big(\frac{x^2-5}{x-3} - x\Big) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-5-(x^2-3x)}{x-3}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-5}{x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{5}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 3 =: b.
\end{aligned}$$

Ponieważ granica f w $+\infty$ nie jest stała, więc f nie ma w $+\infty$ asymptoty poziomej. Aby zbadać, czy istnieje asymptota ukośna liczymy granicę $\frac{f(x)}{x}$ – w naszym przypadku jest ona skończona i określa współczynnik nachylenia asymptoty $a=1$. Badamy teraz granicę $f(x)-ax$, a jej wartość $b=3$ wyznacza drugi parametr prostej. Wnioskujemy, że f ma w $+\infty$ asymptotę ukośną $y = x+3$. Analogicznie pokazujemy, żejest to także asymptota w $-\infty$.

(h) przedziały monotoniczności: wiemy, że f maleje tam, gdzie f' jest ujemna:

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2} \Leftrightarrow x^2-6x+5 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) < 0$$

Badając miejsca zerowe wielomianu kwadratowego oraz szkicując jego wykres dochodzimy do wniosku, że $x \in (1,5) \cap D = (1,3) \cup (3,5)$. W każdym z tych przedziałów funkcja f maleje. Analogicznie, f rośnie tam, gdzie f' jest dodatnia, czyli na przedziałach $(-\infty, 1)$ oraz $(5, +\infty)$.

(i) ekstrema: minima i maksima lokalne mogą pojawić się tylko tam, gdzie $f'(x) = 0$. Są zatem rozwiązaniami równania $x^2 - 6x + 5 = 0$, czyli $x = 1$ lub $x = 5$. Aby zbadać charakter punktu ekstremalnego, badamy jak zmienia się znak f' w otoczeniu punktów stacjonarnych. Na lewo od $x = 1$ pochodna jest dodatnia, a na prawo – ujemna, czyli w tym punkcie jest maksimum lokalne; $f(1) = 2$. Na lewo od $x = 5$ pochodna jest ujemna, a na lewo – dodatnia, czyli w tym punkcie jest minimum lokalne; $f(5) = 10$.

(j) wykres: wpisać “`plot (x^2-5)/(x-3)`” na stronie www.wolframalpha.com

5. Pole siłowe chroniące stację badawczą na Marsie ma kształt półsfery o promieniu $R = 50m$. Znaleźć wymiary stacji w kształcie walca (wysokość h i promień podstawy r) o największej objętości, którą można chronić tym polem.

   (a) (5pkt) Sprowadzić problem do znalezienia największej wartości funkcji $V(h) = \pi R^2 h - \pi h^3,\ h \in [0, R]$.

   (b) (5pkt) Znaleźć największą wartości funkcji $V(h) = \pi R^2 h - \pi h^3,\ h \in [0, R]$.

(a) Objętość walca (stacji badawczej) dana jest wzorem

$$V = \pi r^2 h.$$

Ponadto wymiary stacji r i h są ze sobą powiązane twierdzeniem Pitagorasa:

$$r^2 + h^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = R^2 - h^2.$$

Stąd dostajemy zależność objętości V od jednej tylko zmiennej h:

$$V(h) = \pi(R^2 - h^2)h = \pi R^2 h - \pi h^3.$$

Znalezienie wymiarów stacji o największej objętości sprowadza się do znalezienia największej wartości funkcji V przy założeniu, że h jest nieujemne (jako długość). Ponadto h nie może przekroczyć promienia pola siłowego, więc szukamy największej wartości V dla $h \in [0, R]$.

(b) Funkcja f ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalna na (a, b) przyjmuje swoją największą wartość albo w punktach stacjonarnych (tam, gdzie $f'(x) = 0$), albo na brzegu przedziału. Musimy zatem najpierw znaleźć punkty stacjonarne funkcji V:

$$V'(h) = \pi R^2 - 3\pi h^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 = \frac{R^2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad h = \sqrt{\frac{R^2}{3}} \text{ lub } h = -\sqrt{\frac{R^2}{3}}.$$

Drugie z rozwiązań odrzucamy, bo h ma być dodatnie. Zatem jedyny punkt stacjonarny to $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

Obliczamy teraz wartości V w punktach $h_1 = 0$, $h_2 = \frac{R}{\sqrt{3}}$ i $h_3 = R$ i wybieramy największą z nich:

$$V(h_1) = 0, \quad V(h_2) = \pi(R^2 - \frac{1}{3}R^2)\frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi R^3 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi R^3, \quad V(h_3) = 0.$$

Największa wartość $V_m = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi R^3$ jest osiągana przy wymiarach

$$h_m = \frac{\sqrt{3}}{3}R \text{ i } r_m = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}R.$$