Lista 11: Miary zewnętrzne

WRAiT 1, semestr zimowy 2017/2018

1. Załóżmy, że μ_* jest miarą zewnętrzną na X, a zbiór $B \subset X$ spełnia warunek Carathéodory'ego':
$$\mu_*(Y) = \mu_*(Y \cap B) + \mu_*(Y \setminus B) \text{ dla dowolnego } Y \subset X.$$
Uzasadnić, że wówczas dla $A \subset X$, $A \cap B = \emptyset$ zachodzi
$$\mu_*(Z \cap (A \cup B)) = \mu_*(Z \cap A) + \mu_*(Z \cap B) \text{ dla dowolnego } Z \subset X.$$

2. Załóżmy, że μ_* jest miarą zewnętrzną na X, $A, B \subset X$. Wykazać, że jeśli $\mu_*(B) = 0$, to
$$\mu_*(A \cup B) = \mu_*(A \cap (X \setminus B)) = \mu_*(A).$$

3. Udowodnić, że jeżeli w definicji miary zewnętrznej μ_* usuniemy warunek $\mu_*(\emptyset) = 0$, to nie istnieją zbiory mierzalne w sensie Carathéodory'ego.

4. Niech $X \neq \emptyset$ i niech
$$\mu_*(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A = \emptyset, \\ 1, & \text{gdy } A \neq \emptyset. \end{cases}$$
Pokazać, że μ_* jest miarą zewnętrzną na X i znaleźć σ-ciało zbiorów mierzalnych w sensie Carathéodory'ego. Czy μ_* jest miarą na $\mathcal{P}(X)$?

5. Niech $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Czy funkcja
$$\mu_*(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A = \emptyset \\ \prod_{a \in A} a, & \text{gdy } A \neq \emptyset \end{cases}$$
jest miarą zewnętrzną na X?

6. Dla podanej funkcji $\mu_* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ pokazać, że μ_* jest miarą zewnętrzną.

   (a) $X = \mathbb{N}$, $\mu_*(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A = \emptyset, \\ 1, & \text{gdy } A \neq \emptyset \wedge A \neq X, \\ 2, & \text{gdy } A = X. \end{cases}$

   (b) $X = \mathbb{N}$, $\mu_*(A) = \begin{cases} \frac{|A|}{1+|A|}, & \text{gdy } A \text{ jest skończony}, \\ 1, & \text{gdy } A \text{ jest nieskończony}, \end{cases}$
   gdzie $|A|$ oznacza ilość elementów zbioru A.

   (c) $X = \mathbb{R}$, $\mu_*(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } 0, 1 \notin A \\ \frac{1}{2}, & \text{gdy } 0 \in A \wedge 1 \notin A \\ 1, & \text{gdy } 1 \in A \end{cases}$

   (d) $X \neq \emptyset$ dowolny, $Y \subset X$, $\mu_*(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A \cap Y = \emptyset \\ \pi, & \text{gdy } A \cap Y \neq \emptyset \end{cases}$

   Dla przykładów (a) i (b) wyznaczyć σ-ciało zbiorów mierzalnych w sensie Carathéodory'ego.